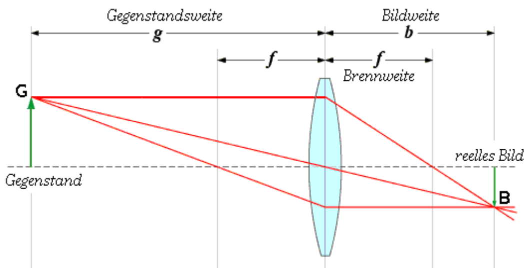
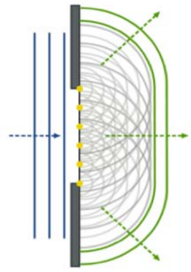
b
UNIVERSITÄT
BERN

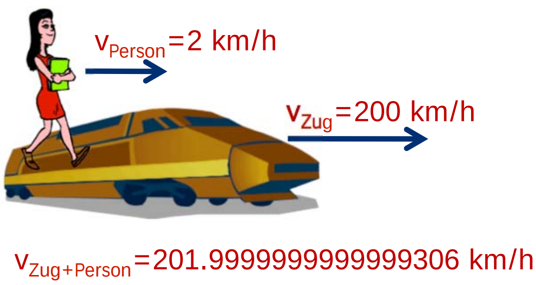
Physik II



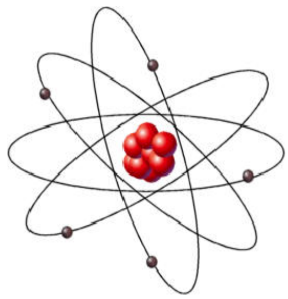
Geometrische Optik



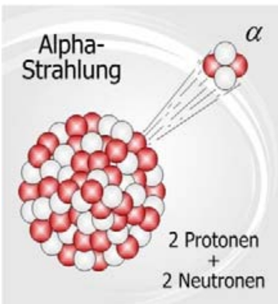
Wellenoptik



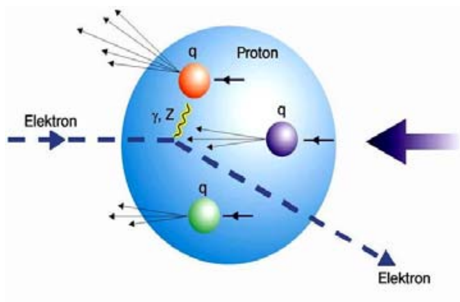
Relativität



Atome



Kerne



Elementarteilchen

PD Dr. Hans Peter Beck

Frühjahrssemester 2014

Physikalisches Institut, Universität Bern

Vorwort

Mit diesem Teil wird der Einführungskurs Physik abgeschlossen. Dabei werden Optik, die spezielle Relativitätstheorie sowie der Aufbau der Materie besprochen. Mit einfachen Experimenten, die im Hörsaal vorgeführt werden, wird gezeigt wo die Grenzen der klassischen physikalischen Beschreibung der Welt liegen. Mit zum Teil revolutionären Konzepterweiterungen, die im noch jungen 20. Jahrhundert stattfanden, konnten die Grundlagen der modernen Physik geschaffen werden, die zu unserem heutigen Verständnis des Universums die Basis bilden. Die moderne Physik hat gezeigt, dass Raum und Zeit keine absoluten und unabhängigen Grössen sind, sondern dem Begriff der Raumzeit weichen müssen. Die Gesetze der Natur laufen nicht absolut deterministisch ab; es können nur präzise Wahrscheinlichkeits-interpretationen getroffen werden, diese aber mit äusserster Präzision. Anfänglich als kontinuierlich gedachte Grössen, wie Energie, (Dreh-)Impuls, Ladung, etc., wurden als diskrete Grössen erkannt, die keine beliebigen Zwischenwerte annehmen können. Die Grundpfeiler der modernen Physik sind die Relativitätstheorie und die Quantenmechanik, welche erlauben das Universum und alles darin Enthaltene von seinen grössten bis zu den kleinsten Strukturen, zu verstehen.

Die Erkenntnisse der modernen Physik haben die Welt grundlegend verändert. Transistoren, aus denen Prozessoren (die zentrale Recheneinheit in Computern) aufgebaut sind, hätten nicht ohne ein tiefes Verständnis der Quantenmechanik entwickelt werden können. Navigation mit GPS Geräten wäre unmöglich, wenn nicht die subtilen Effekte der Einstein´schen Relativitätstheorie berücksichtigt würden. Moderne Diagnosegeräte und Analysemethoden in der Medizin sind direkte Anwendungen aus der Teilchenphysik. So spielt z.B. Antimaterie bei PET-Scans eine wesentliche Rolle bei der Diagnose von Stoffwechselprozessen, in der Onkologie, Neurologie sowie Kardiologie. Dies geht allerdings nicht ohne Einnahme von radioaktiven Substanzen kurz vor dem Untersuch, die in Form von Medikamenten, so genannten Radiopharmaka, verabreicht werden. Weniger bekannt dabei ist, dass diese kurzlebigen Präparate mittels eines Teilchenbeschleunigers kurz vor jeder Untersuchung erst erzeugt werden müssen.

Viele Konzepte der Physik, und dies gilt insbesondere auch für die moderne Physik, können auf den ersten Blick etwas abstrakt erscheinen. Nichtsdestotrotz bieten diese das Rüstzeug, die Abläufe in der Natur auf fundamentale Art und Weise zu verstehen. Gerade deshalb ist die Physik das Fundament aller naturwissenschaftlichen Fächer. Sich mit Physik auseinanderzusetzen und, nach eventuellen Anfangsmühen, schliesslich zu begreifen, lohnt sich daher nicht nur für zukünftige Physiker, sondern für alle Studierende, die in einer modernen Wissensgesellschaft einmal kompetent bestehen wollen.

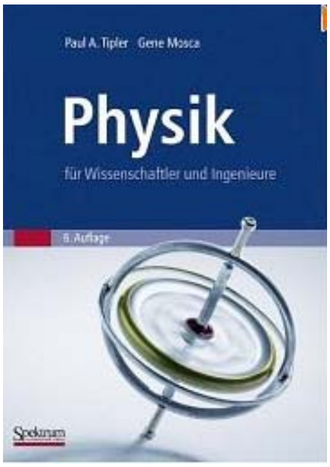
Die Auseinandersetzung mit der Physik ist daher immer sinnvoll investierte Zeit, verlangt jedoch von den Studierenden eine besondere Eigenleistung.

In der Vorlesung wird der Stoff möglichst umfassend, in konzentriert geraffter Form behandelt, wobei mit vielen Demonstrationsexperimenten jeweils ein klarer Bezug zu den realen Gegebenheiten illustriert wird. Dieser spezielle Aufwand, welcher nur in relativ wenigen ausgewählten Universitäten in dieser Form sozusagen auf dem Silbertablett serviert wird, bildet einen wesentlichen Teil die physikalischen Konzepte zu verdeutlichen. Dies wird vor allem dann nützlich, wenn Sie sich während der Vorlesungen voll und ganz auf den Stoff konzentrieren.

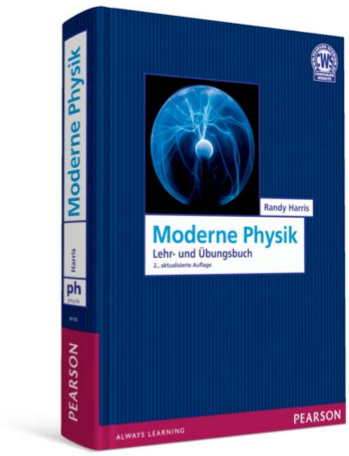
Hans Peter Beck
CERN, im März 2014

Literaturvorschläge

Zur Ergänzung dieses Skripts, welches auch in elektronischer Form von http://www.lhep.unibe.ch/beck/Physik_II.html abrufbar ist, wird empfohlen die entsprechenden Kapitel mit Hilfe eines Lehrbuchs zu vertiefen. Literaturvorschläge dazu sind z.B. Tipler und Harris.



Paul A. Tipler
Spektrum Akademischer Verlag



Randy Harris
Pearson Studium
2013

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Einige physikalische Konstanten

Grösse	Symbol	Numerischer Wert	Einheit
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	299 792 458 (exakt)	$m \cdot s^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$=1.256 637 061... $\cdot 10^{-6}$	$N \cdot A^{-2}$
Elektrische Feldkonstante	$\varepsilon_0=1/(\mu_0 \cdot c^2)$	8.854 187 818... $\cdot 10^{-12}$	$A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$
Elementarladung	e	1.602 176 565(35) $\cdot 10^{-19}$	C
Elektronvolt	eV	1.602 176 565(35) $\cdot 10^{-19}$	J
Planck´sche Konstante	h	6.626 069 57(29) $\cdot 10^{-34}$ 4.135 667 516(91) $\cdot 10^{-15}$	$J \cdot s$ $eV \cdot s$
Reduzierte Planck´sche Konstante	$\hbar=h/2\pi$	1.054 571 726(47) $\cdot 10^{-34}$ 6.582 119 28(15) $\cdot 10^{-16}$	$J \cdot s$ $eV \cdot s$
Elektronmasse	m_e	9.109 382 91(40) $\cdot 10^{-31}$ 0.510 998 928(11)	kg $MeV \cdot c^{-2}$
Protonmasse	m_p	1.672 621 777(74) $\cdot 10^{-27}$ 938.272 046(21)	kg $MeV \cdot c^{-2}$
Neutronmasse	m_N	1.674 927 351(74) $\cdot 10^{-27}$ 939.565 379(21)	kg $MeV \cdot c^{-2}$
Atomare Masseneinheit	u	1.660 538 921(73) $\cdot 10^{-27}$ 931.494 061(21)	kg $MeV \cdot c^{-2}$
Bohr´scher Radius	a_0	5.29 177 210 92(17) $\cdot 10^{-11}$	m
Rydberg Energie	Ry	13.605 692 53(30)	eV
Compton Wellenlänge	$\lambda_C=m_e/hc$	2.426 310 2389(16) $\cdot 10^{-12}$	m
Avogadro Konstante	N_A	6.022 141 29(27) $\cdot 10^{-23}$	mol^{-1}
Boltzmann Konstante	k_B	1.380 6488(13) $\cdot 10^{-23}$ 8.617 3324(78) $\cdot 10^{-5}$	$J \cdot K$ $eV \cdot K$
Pi	π	3.141 592 653 589 793...	
Euler´sche Zahl	e	2.718 281 828 459 045...	

Die angegebenen numerischen Werte sind die vom US National Institute of Science and Technology (NIST) empfohlenen: http://physics.nist.gov/constants
Die Zahl in Klammern gibt jeweils die Ungenauigkeit auf die beiden letzten Ziffern an.

Optik

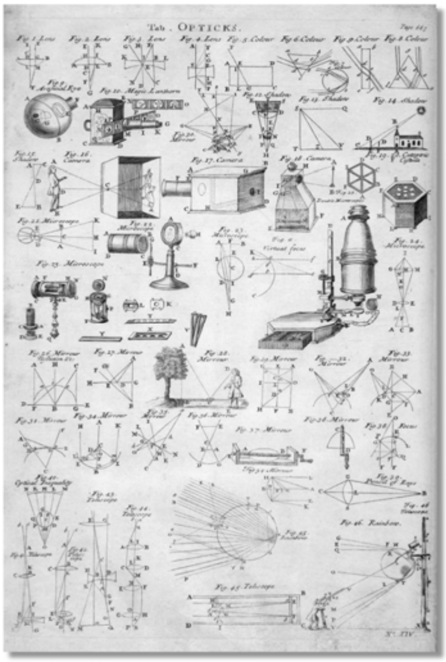
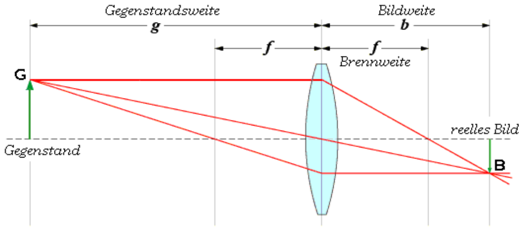
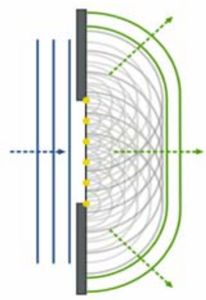


Table of Opticks, 1728 Cyclopaedia
by Sir Isaac Newton



Geometrische Optik



Wellenoptik

Geometrische Optik

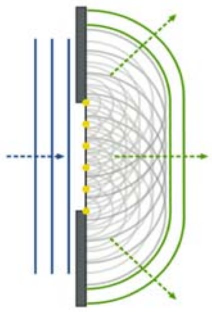
Allgemeines über die Ausbreitung von Licht

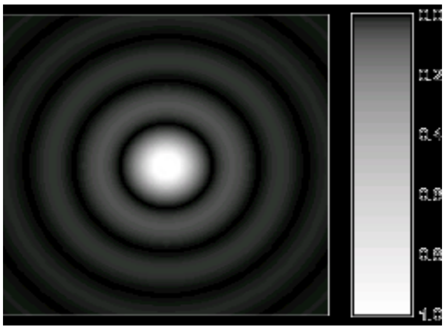
M.C. Escher
Hand mit reflektierender Kugel
1935

Lichtausbreitung

Licht breitet sich als elektromagnetische Welle aus.
(Was dies genau bedeutet, werden wir im Rahmen der modernen Physik noch weiter erläutern.)

Bei **Hindernissen** und **Blenden** mit **Dimensionen** in der Grössenordnung der **Lichtwellenlänge** (für **sichtbares Licht λ = 360 - 780 nm**) muss der Wellencharakter der Ausbreitung berücksichtigt werden.





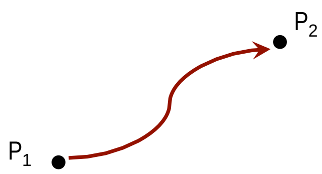
Fermat´sches Prinzip

In vielen Fällen genügt für die Untersuchungen der Lichtausbreitung die **Strahlenoptik**.

Die **Strahlenoptik** ist die entscheidende Methode zum **Verständnis optischer Abbildungen und optischer Geräte**. Sie baut auf dem Fermat´schen Prinzip auf.

Fermat'sches Prinzip:

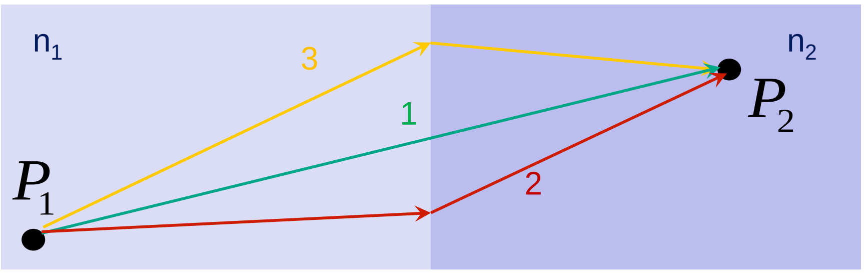
Licht wählt zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 den optisch kürzesten Weg.



Pierre de Fermat
* 17. August 1601 in Beaumont-de-Lomagne
† 12. Januar 1665 in Beaumont-de-Lomagne

Fermat´sches Prinzip

Definition: **optischer Weg ≡ Weg × Brechungsindex**



Mögliche Wege von P_1 zu P_2
Das Licht muss dabei die **optischen Medien n_1 und n_2** durchqueren.

Der optische Weg s_i^{optisch} $(\text{mit } i = 1,2,3 \text{ in obigem Bild})$ ist demnach:

$$s_i^{\text{optisch}} = \ell_{i,1} n_1 + \ell_{i,2} n_2$$

wobei $\ell_{i,j}$ der i-te Weg im Medium j und n_j der Brechungsindex im Medium j bedeuten (mit $j = 1,2$ in obigem Bild).

Fermat´sches Prinzip

Der **Brechungsindex** n gibt an wie viel langsamer sich Licht in einem optischen Medium ausbreitet als im Vakuum.

c Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c = 299 792 458 m/s (exakt)
$c´$ Lichtgeschwindigkeit im optischen Medium	wobei gilt: $c´ < c$
n Brechungsindex	$c´ \cdot n = c \qquad n \geq 1$

Für den optisch kürzesten Weg gilt, dass die Laufzeit des Lichtstrahls minimal ist:

$$\text{Laufzeit } T_{P_1 \to P_2} = \int_{t_{P_1}}^{t_{P_2}} dt \overset{!}{=} Minimum$$

$$\int_{t_{P_1}}^{t_{P_2}} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{c'(s)} \cdot ds = \frac{1}{c} \cdot \int_{P_1}^{P_2} n(s) \cdot ds = \frac{1}{c} \cdot \sum_i n_i s_i \overset{!}{=} Minimum$$

Fermat´sches Prinzip

Das Fermat'sche Prinzip geht von Lichtstrahlen aus und bestimmt deren Verlauf durch die Lösung eines Optimierungsproblems (Variationsrechnung).

Aus dem Fermat´schen Prinzip folgen die drei Grundgesetze der geometrischen Optik:

- **geradlinige Ausbreitung in einem homogenen Medium**
- **Reflexionsgesetz** → Einfallswinkel = Ausfallswinkel
- **Brechungsgesetz** → $\sin\alpha_1 / \sin\alpha_2 = n_2 / n_1$ (Snellius)

Das Fermat'sche Prinzip kann jedoch Interferenz- und Beugungserscheinungen nicht erklären. ⇒ Diese Phänomene werden erst in der Wellenoptik erklärbar.

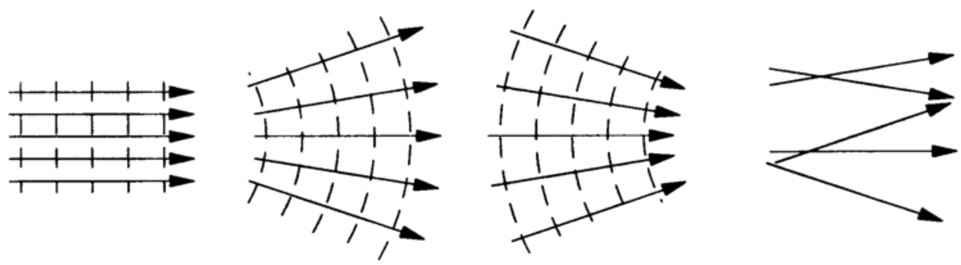
In der Strahlenoptik treten verschiedene Lichtstrahlen miteinander nicht in Wechselwirkung.

Strahlenbild und Wellenbild

Beim **Strahlenbild** stellen wir die **Lichtausbreitung durch Strahlen** dar,
im **Wellenbild** durch **Wellenfronten**.

Da die Ausbreitung immer senkrecht zu den Wellenfronten erfolgt, müssen **Strahlen immer senkrecht auf den Wellenfronten** stehen.

Ein **Lichtstrahl** ist eine **Konstruktionshilfe** und hat keine eigentliche physikalische Bedeutung.



paralleles Strahlenbündel | divergentes Strahlenbündel | konvergentes Strahlenbündel | diffuses Licht

Geometrische Optik

Geradlinige Ausbreitung und Reflexion

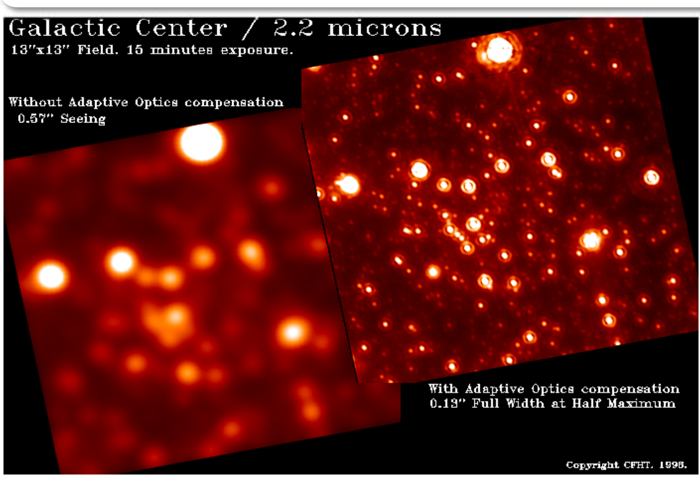
Michelangelo Caravaggio
Narcissus, 1597-99.

Geradlinige Ausbreitung von Licht

Die **geradlinige Ausbreitung** (im Vakuum) von Licht ist eine **Erfahrungstatsache** und **geht auch aus dem Fermat'schen Prinzip** hervor, solange die Ausbreitungsgeschwindigkeit nicht ortsabhängig ist.

In der **Vermessungstechnik** nützt man die geradlinige Ausbreitung des Lichtes seit langem aus. Für genaue Nivellierungen braucht man Laserstrahlen.

In der **Astronomie** muss man aber schon die **Brechung** von Licht in Luft unterschiedlicher Dichte berücksichtigen.



Mit Hilfe von **adaptiver Optik** kann die **Brechung von Lichtstrahlen in Luft unterschiedlicher Dichte** (Dichteschwankungen durch Luftturbulenzen!) korrigiert werden.

Dabei wird die Bildqualität wesentlich erhöht.

Lochkamera

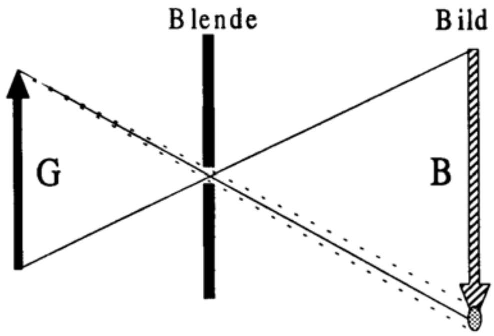
Ein optisches Instrument, das auf der **Geradlinigkeit der Ausbreitung des Lichtes** beruht, ist die **Lochkamera**.

Von den divergenten Strahlen eines Gegenstandspunktes wird durch die Lochkamera ein **schmales Strahlenbündel** ausgeblendet.

Auf dem Schirm der Kamera entsteht ein Bild des Gegenstandes.

Bei **grosser Blende** ist das Bild sehr **unscharf**, da jedem Gegenstandspunkt ein grosser Fleck entspricht.

Bei **kleiner Blende** wird das Bild sehr **lichtschwach** und die **Beugung** an der Lochblende ist nicht mehr zu vernachlässigen.



Das **Bild B** wird hier als ***reelles Bild*** bezeichnet.

Ein reelles Bild kann ohne weitere Hilfsmittel auf einem Schirm gezeigt werden.

Bei der Lochkamera handelt es sich streng genommen nicht um eine optische Abbildung, da der Schirm in beliebiger Distanz hinter die Lochblende gestellt werden kann und somit ein Gegenstandspunkt nicht genau einem festen Bildpunkt entspricht.

Reflexionsgesetz

Wen oder was sieht Venus im Spiegel ?
→ Venus sieht dem Maler Velazquez direkt ins Gesicht!
Wieso ist dies so?

Diego Velazquez
Venus vor dem Spiegel, 1648-51

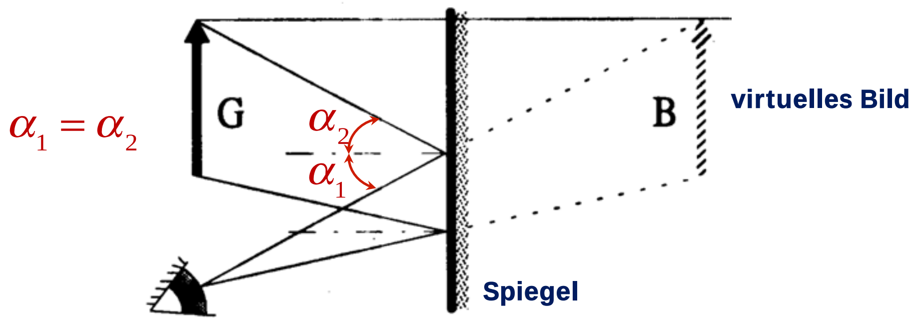
Reflexionsgesetz

An der **Grenzfläche von zwei Medien** wird **Licht ganz oder teilweise reflektiert.**

Für die **reguläre Reflexion** von Licht an einer ebenen Fläche gilt, dass beim einfallenden Strahl und dem zugehörigen reflektierten Strahl **die zum Lot gemessenen Winkel gleich gross sind** und dass **einfallender Strahl, Lot und reflektierter Strahl in einer Ebene liegen**.

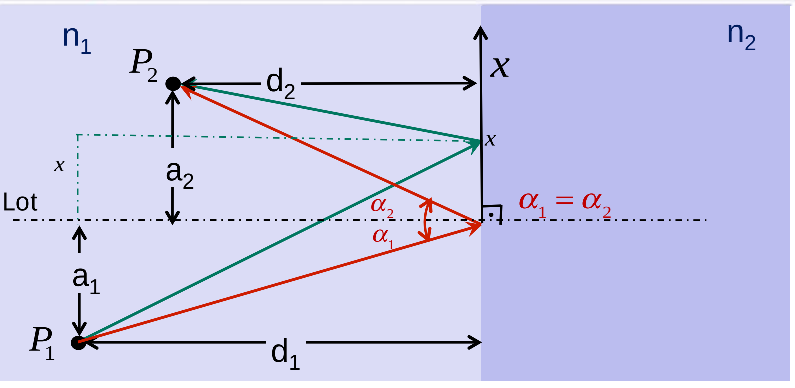
Reguläre Reflexion tritt bei **glatten Oberfläche**n, z.B. bei polierten Metallen, auf.

Bei **rauen Oberflächen** wird Licht **diffus reflektiert**.



Fermat´sches Prinzip ⇒ Reflexionsgesetz

Das ***Reflexionsgesetz*** **(Einfallswinkel = Ausfallswinkel)** ist eine direkte Folge des Fermat'schen Prinzips.

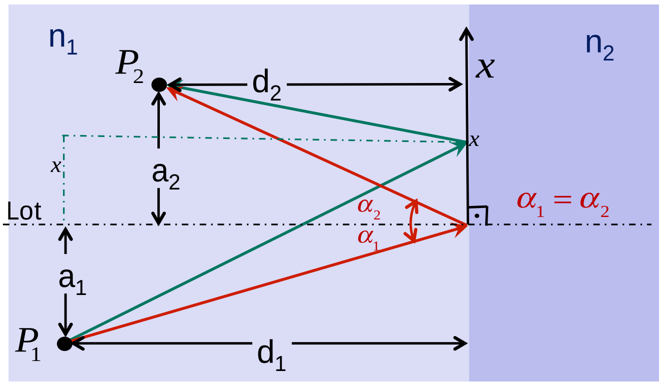


Das Lot wird so konstruiert, dass $\alpha_1=\alpha_2$ gilt.
x misst den Reflexionspunkt eines beliebigen Lichtstrahls von P_1 nach P_2 entlang der Reflexionsebene.

Der Lichtweg eines beliebigen Lichtstrahls wird nun als Funktion von x berechnet
Der kürzeste Lichtweg wird durch Ableiten nach x ermittelt.

Entsprechend der Konstruktion ist der Beweis (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) erbracht, falls $x=0$ die Minimalbedingung erfüllt.

Fermat´sches Prinzip ⇒ Reflexionsgesetz



Das Lot wird so konstruiert, dass $\alpha_1 = \alpha_2$ gilt.

Demnach gilt (Strahlensatz):

$$\frac{a_1}{d_1} = \frac{a_2}{d_2}$$

entsprechend gilt auch:

$$\frac{a_1^2}{a_1^2 + d_1^2} = \frac{a_2^2}{a_2^2 + d_2^2}$$

$$\sum n_i s_i \overset{!}{=} Minimum \quad \Rightarrow n_1\sqrt{(a_1+x)^2 + d_1^2} + n_1\sqrt{(a_2-x)^2 + d_2^2} \overset{!}{=} Minimum$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\sqrt{(a_1+x)^2 + d_1^2} + \sqrt{(a_2-x)^2 + d_2^2}\right) \overset{!}{=} 0 \qquad \frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{2(a_1+x)}{\sqrt{(a_1+x)^2 + d_1^2}} + \frac{1}{2}\frac{-2(a_2-x)}{\sqrt{(a_2-x)^2 + d_2^2}} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{(a_1+x)^2}{(a_1+x)^2 + d_1^2} = \frac{(a_2-x)^2}{(a_2-x)^2 + d_2^2}$$

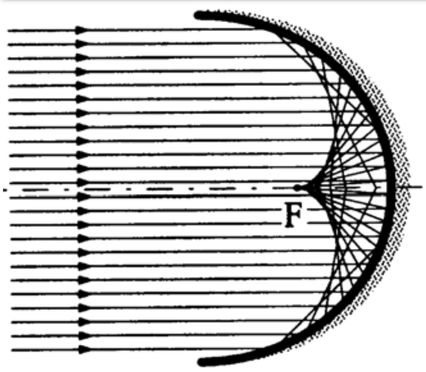
Dies ist offensichtlich wahr für $x = 0$.

d.h. x=0 erfüllt die Minimalbedingung $\Rightarrow$ somit folgt aus dem Fermat´schen Prinzip das Reflexionsgesetz.

Hohlspiegel

Licht, das **parallel zur optischen Achse** auf einen ***sphärischen Hohlspiegel*** auftrifft, wird so reflektiert, dass **sich alle reflektierten Strahlen mit der optischen Achse schneiden**.

Die Einhüllende der reflektierten Strahlen ist eine geschlossene Kurve, die *Kaustik* .
Diese kann man beispielsweise in der Kaffeetasse beobachten.



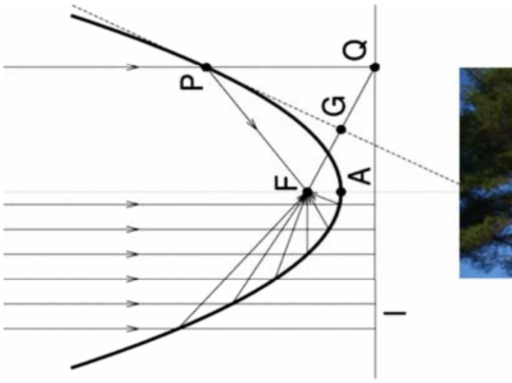
Reflexion von zur optischen Achse parallelen Strahlen in einem **sphärischen Hohlspiegel**.

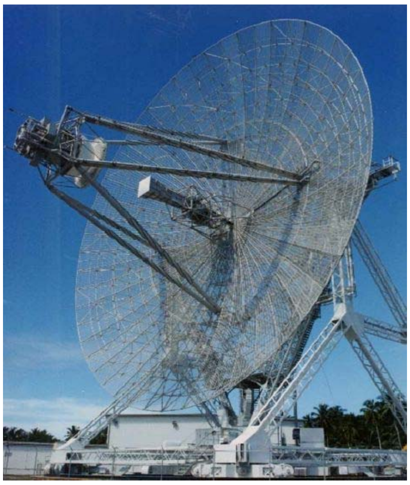
Reflektierte Strahlen sind, der Übersichtlichkeit wegen, **nur bis zum Schnittpunkt mit der optischen Achse** eingezeichnet.

Parabolantenne

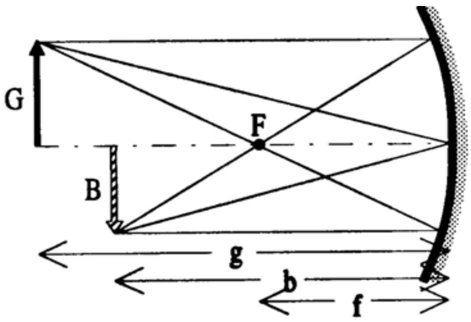
Wird die **kugelförmige Reflexionsfläche** durch eine **parabolische** ersetzt, so vereinigen sich ***alle* Parallel-Strahlen exakt im Brennpunkt**.
Und nicht bloss die achsennahen…

Anwendung: Parabolspiegel, Parabolantenne





Hohlspiegel: Abbildungsgleichung



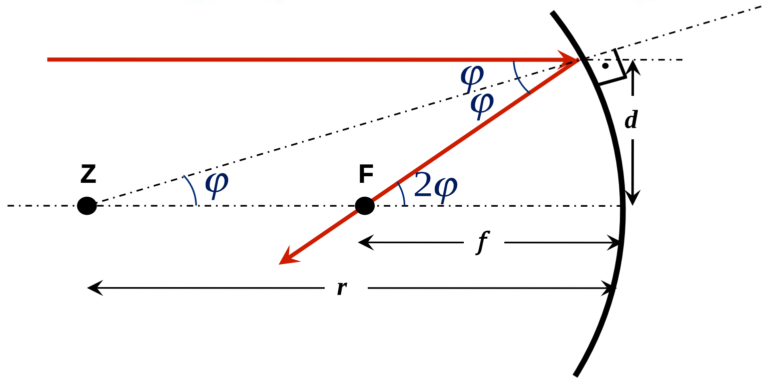
G	**Gegenstand**
B	**Bild**
F	**Brennpunkt**
g	**Gegenstandsweite**
b	**Bildweite**
f	**Brennweite**

Im Folgenden sollen für Fragen der Abbildung (bei sphärischen Spiegeln und bei Linsen) **immer nur paraxiale Strahlen** untersucht werden.

Zur Konstruktion werden drei ausgewählte Strahlen verwendet:

- **Parallelstrahlen** werden als Brennstrahlen reflektiert
- **Brennstrahlen** werden als Parallelstrahlen reflektiert
- **Mittelpunktstrahlen** werden achsensymmetrisch reflektiert

Hohlspiegel: Brennweite f



Zur **Berechnung der Brennweite f als Funktion des Krümmungsradius r** soll ein **paraxialer Parallelstrahl** (wird als Brennstrahl reflektiert) betrachtet werden.

Das **Lot** geht durch den **Mittelpunkt Z** des Hohlspiegels. Damit sind **Eintrittswinkel φ** und **Reflexionswinkel φ** gleich gross.

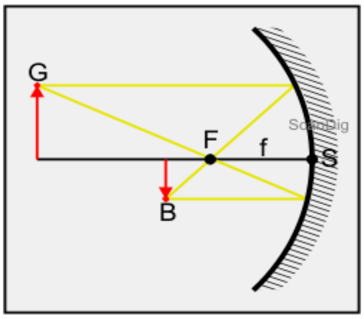
Für **d** gilt:

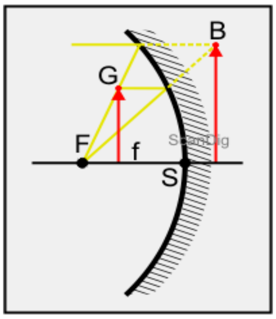
$$d = r \cdot \tan\varphi \quad \approx r\varphi$$
$$d = f \cdot \tan 2\varphi \approx f2\varphi \qquad \Rightarrow \qquad r\varphi = 2f\varphi$$
$$\Rightarrow \text{Brennweite} \quad f = r/2$$

Brennpunkt F

Strahlen nahe der optischen Achse häufen sich nach der Reflexion in einem **Punkt F, dem *Brennpunkt*.**

Diese **achsennahen Strahlen** werden als ***paraxiale Strahlen*** bezeichnet.

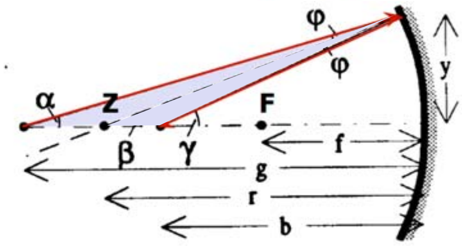




Der Hohlspiegel erzeugt ein **relles Bild**, falls die **Gegenstandsweite** (= Abstand des Gegenstandes von der Spiegelfläche) grösser ist als die Brennweite.

Andernfalls entsteht ein **virtuelles Bild**.

Hohlspiegel: Abbildungsgleichung



g Gegenstandsweite
b Bildweite
f Brennweite

r Krümmungsradius; $f = \frac{r}{2}$

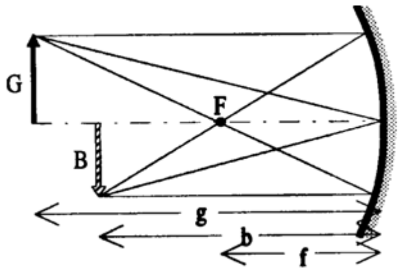
Gegeben: Gegenstandsweite g und Brennweite f
Gesucht: Bildweite b
Es gilt das Reflexionsgesetz, weiter werden nur paraxiale Strahlen betrachtet; dann gilt: $\tan\alpha \approx \alpha \approx \sin\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{y}{g} \approx \alpha \qquad \tan\beta = \frac{y}{r} \approx \beta \qquad \tan\gamma = \frac{y}{b} \approx \gamma$$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha + \varphi + (\pi - \beta) = \pi & \Rightarrow \varphi = \beta - \alpha \\ \beta + \varphi + (\pi - \gamma) = \pi & \Rightarrow \varphi = \gamma - \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta$$

$$\beta - \alpha \;=\; \gamma - \beta \quad \to \quad \frac{y}{r} - \frac{y}{g} = \frac{y}{b} - \frac{y}{r} \quad \to \quad \frac{2}{r} = \boxed{\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}}$$

Hohlspiegel: Abbildungsgleichung



r Krümmungsradius

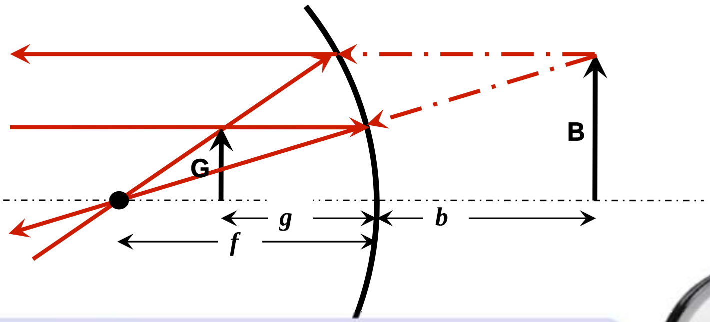
f Brennweite $f = \frac{r}{2}$

b Bildweite

g Gegenstandsweite

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$ **Abbildungsgleichung**

Hohlspiegel: Abbildungsgleichung



Ist die **Gegenstandsweite** g **kleiner als** die **Brennweite** f, dann wird die **Bildweite** b **negativ**.

Das **virtuelle Bild** ist **aufrecht**, **vergrössert** und befindet sich **hinter dem Spiegel**.

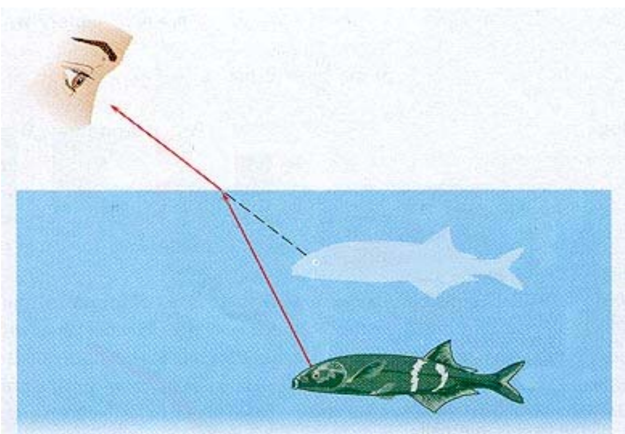
Dies wird z.Bsp. bei **Schminkspiegeln** angewendet.

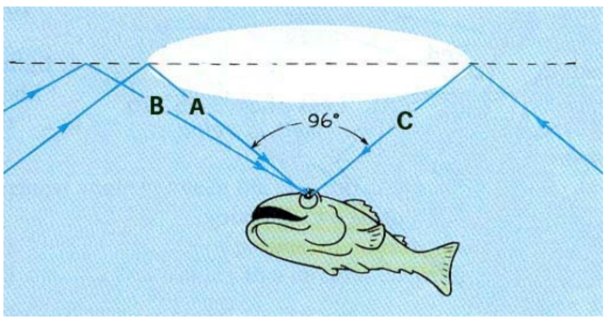
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} < 0 \quad \text{für } g < f$$

Eine negative Bildweite bedeutet, dass sich das Bild hinter dem Spiegel befindet.

Geometrische Optik

Brechungsgesetz und Totalreflexion

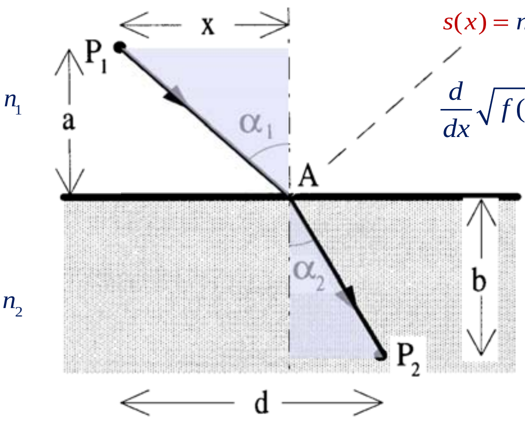




Brechungsgesetz

An der Grenzfläche zwischen zwei transparenten Medien wird Licht nicht nur reflektiert, sondern meistens tritt ein Teil des Lichtes mit geänderter Ausbreitungsrichtung in das neue Medium über.
Das Licht wird gebrochen.

Gemäss dem **Fermat'schem Prinzip** lässt sich **der Winkel des gebrochenen Strahls** bestimmen, indem man nach dem optisch kürzesten Weg sucht:



$$s(x) = n_1 \cdot \overline{P_1A} + n_2 \cdot \overline{AP_2} = n_1 \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \cdot \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \overset{!}{=} \text{Minimum}$$

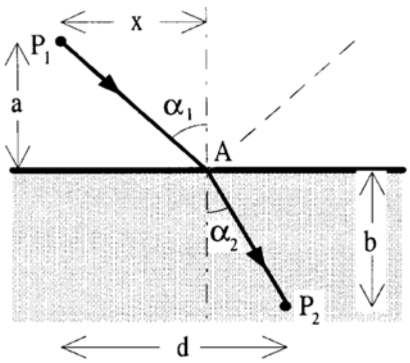
$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad \text{Ableiten einer Funktion unter einer Wurzel}$$

$$\frac{ds}{dx} = n_1 \cdot \underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}}_{\sin\alpha_1} + n_2 \cdot \underbrace{\frac{-2\cdot(d-x)}{2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}}_{-\sin\alpha_2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \cdot \sin\alpha_1 = n_2 \cdot \sin\alpha_2$$

n_i ist der Brechungsindex des Mediums i

Brechungsgesetz



$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

***Brechungsgesetz* nach Snellius.**
n_i ist der Brechungsindex des Mediums i
c_i ist die Lichtgeschwindigkeit im Medium i

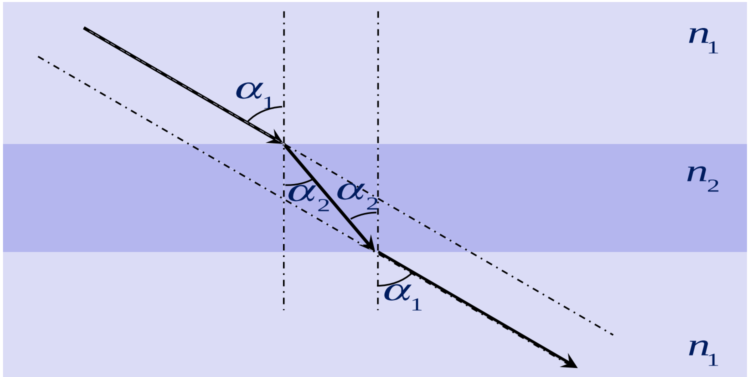
Beim Übergang vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium werden die Strahlen zum Lot hin gebrochen.

Das Verhältnis Ausfalls- zu Einfallswinkel hängt von den Brechungsindizes der beiden Medien ab.

Einige typische Brechungsindizes sind:

Vakuum:	**n = 1**
Luft:	**n = 1.0003**
Wasser:	**n = 1.33**
Gläser:	**n = 1.5 - 1.9**
Diamant:	**n = 2.42**

Brechung an Planparalleler Platte



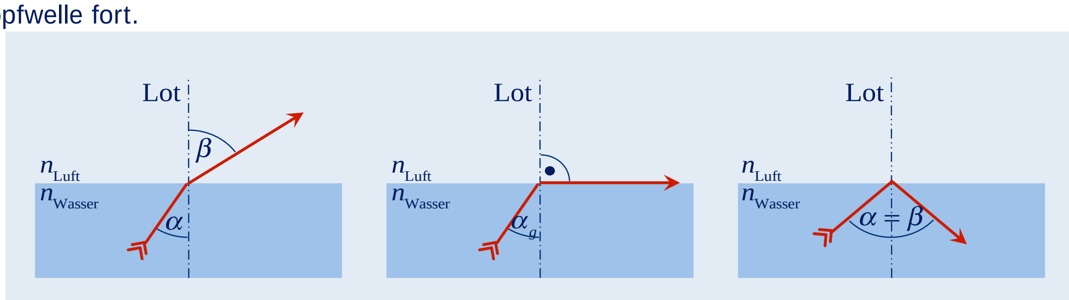
An einer planparallelen Platte wird ein Lichtstrahl **zweimal gebrochen**.

Nach dem Übertritt von Medium 1 in Medium 2 und zurück ins Medium 1, ist er **seitlich etwas verschoben**, hat aber wieder seine **ursprüngliche Richtung**.

Totalreflexion

Beim Übergang vom **optisch dichteren Medium 1** ins **dünnere Medium 2 ($n_1 > n_2$)** ist der **Ausfallswinkel (β) grösser als der Einfallswinkel (α)**.

Mit $\alpha \rightarrow \alpha_G$ geht $\beta \rightarrow 90°$, das heisst der Lichtstrahl verläuft entlang der Grenzfläche und pflanzt sich als Kopfwelle fort.

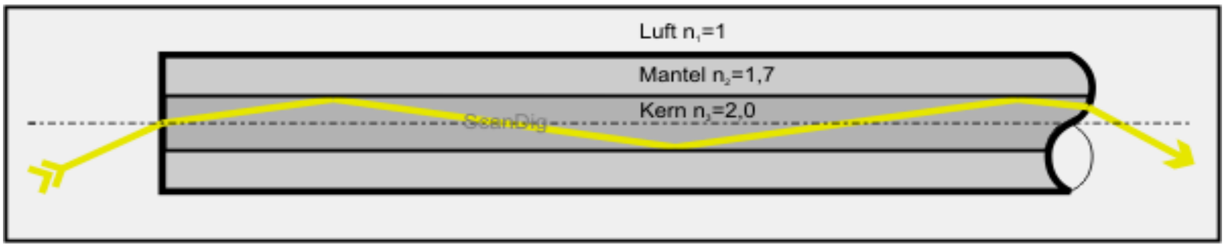


Für $\alpha > \alpha_G$ tritt ***Totalreflexion*** auf: **der gebrochene Strahl kann Medium 1 dann nicht mehr verlassen, er wird total reflektiert.**

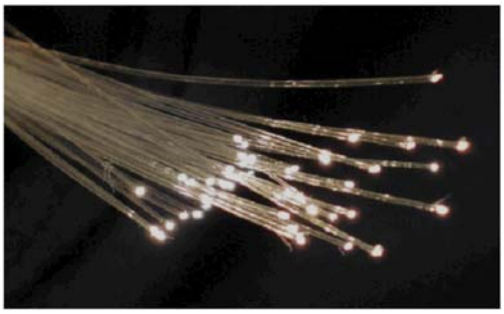
Für den Grenzwinkel der Totalreflexion α_G gilt:

$$\frac{\sin\alpha_G}{\sin 90^\circ} = \sin\alpha_G = \frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Wasser}}} = \frac{c_{\text{Wasser}}}{c_{\text{Luft}}} \qquad \text{wobei:} \quad c = c_i n_i$$

Totalreflexion



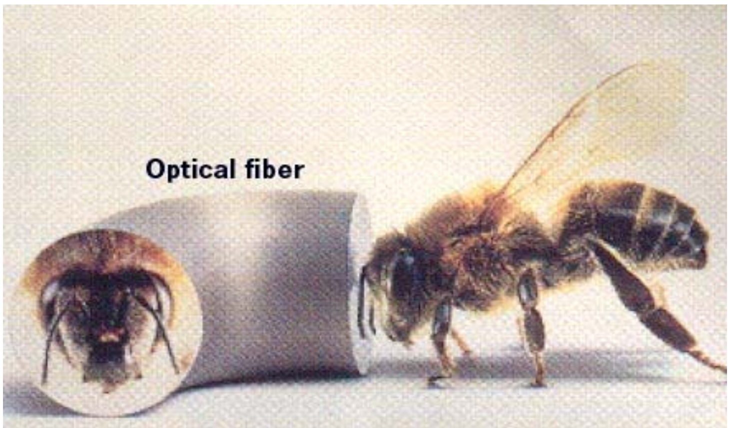
Lichtübertragung mit Glasfasern

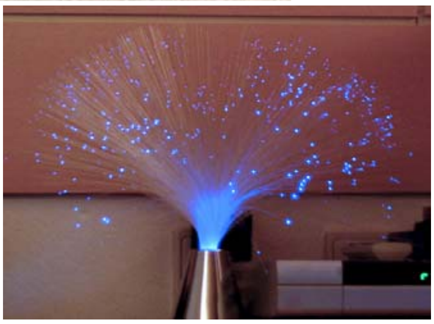


Der **Brechungsindex** ist im **Kern** eines **Lichtleiters** entlang der Achse gross und nimmt nach außen hin entweder sprunghaft (**Stufenindexfase**r) oder allmählich (**Gradientenindexfaser**) ab, indem ein **Mantel** mit niedrigerem Brechungsindex aufgebracht wird.

Lichtleiter ohne diesen Mantel würden zwar auch Licht fortleiten, es käme jedoch bei Berührung oder Verschmutzungen zur Auskopplung von Licht.

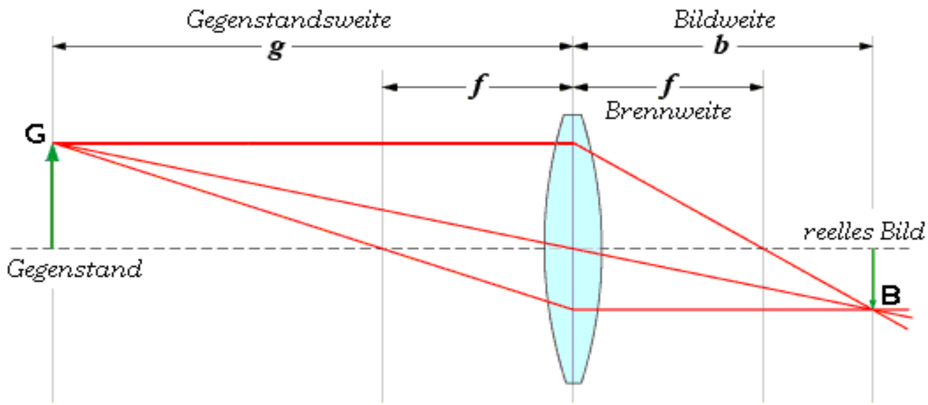
Lichtleiter – Totalreflexion





Geometrische Optik

Abbildung durch Linsen

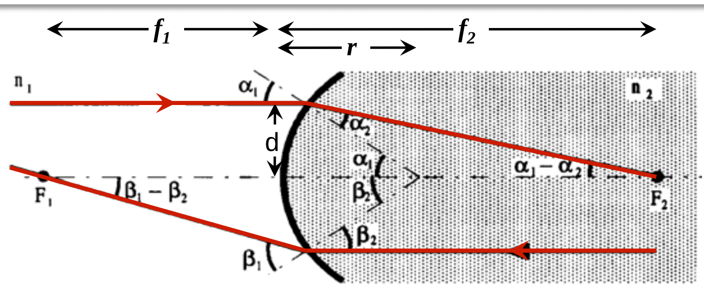


Brechung an sphärischer Fläche

Bei der **Brechung von Licht an einer sphärischen Fläche** kann man eine **„hintere" Brennweite f_2** im **Medium 2** und **eine „vordere" Brennweite f_1** im **Medium 1** bestimmen.

Für die Berechnung der beiden Brennweiten wird die **paraxiale Näherung** verwendet.

Ein Parallelstrahl kreuzt die optische Achse nach der Brechung gerade bei der Brennweite.



Für die hintere Brennweite f_2 gilt:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \approx \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$d = f_2 \cdot \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = r \cdot \tan\alpha_1$$

Näherung für kleine Winkel:

$$f_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) \approx r \cdot \alpha_1$$

$$\Rightarrow \quad f_2 = r \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} = r \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\alpha_2 / \alpha_1}_{\approx n_1/n_2}} = r \cdot \frac{n_2}{n_2 - n_1}$$

Die vordere Brennweite f_1 erhält man einfach durch Vertauschen der Inidizes $1 \leftrightarrow 2$

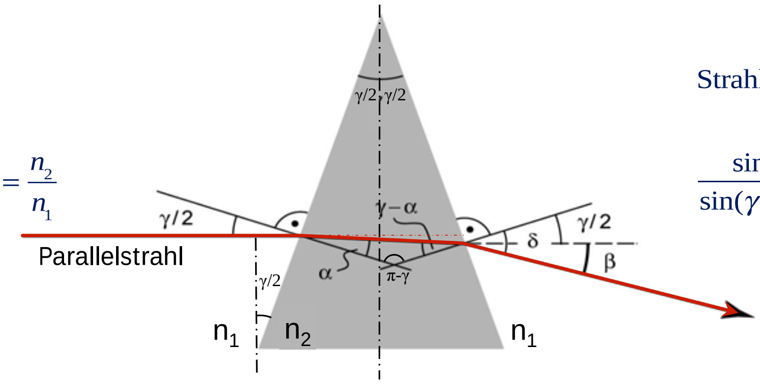
$$f_1 = r \cdot \frac{n_1}{n_1 - n_2}$$

Brechung an einer Prismakante

Zur Vorbereitung der Berechnung **der Abbildungsgleichung einer dünnen Linse** betrachten wir zunächst den Strahlengang in einem dünnen Prisma:

Strahleintritt

$$\frac{\sin(\gamma/2)}{\sin\alpha} \approx \frac{\gamma}{2\cdot\alpha} = \frac{n_2}{n_1}$$



Strahlaustritt

$$\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma-\alpha)} \approx \frac{\delta}{\gamma-\alpha} = \frac{n_2}{n_1}$$

Gesamtablenkung β

$$\beta = \delta - \frac{\gamma}{2} = \underbrace{\frac{n_2}{n_1}\cdot(\gamma-\alpha)}_{\delta} - \frac{\gamma}{2} = \gamma\cdot\Big[\frac{n_2}{n_1}\cdot\Big(1-\underbrace{\frac{\alpha}{\gamma}}_{\frac{n_1}{2n_2}}\Big) - \frac{1}{2}\Big] = \gamma\cdot\Big(\frac{n_2}{n_1}-1\Big) = \gamma\cdot\Big(\frac{n_2-n_1}{n_1}\Big)$$

Zwischenresultat –
wird zur Berechnung der
dünnen Linse verwendet...

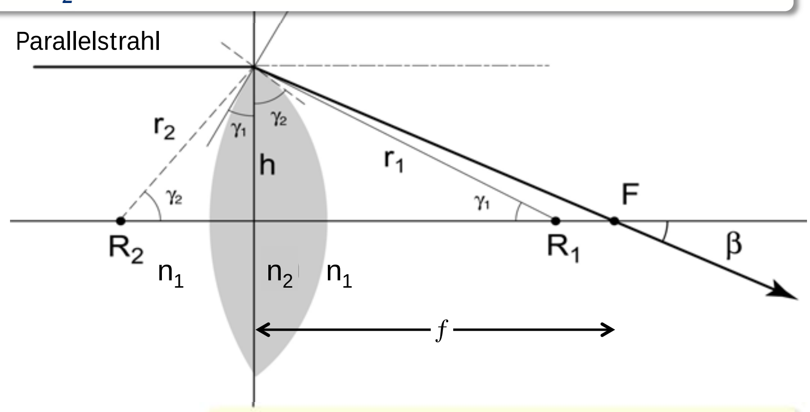
Abbildung durch dünne Linsen

Wir geben den **Krümmungsradien** ein **Vorzeichen**: Sind Linsenflächen auf die der Lichtstrahl von Links kommend trifft **konvex** (d.h. zum Lichtstrahl hin gekrümmt), so sind diese **positiv** zu nehmen; ansonsten negativ.
Damit gilt in folgender Figur: $r_1 > 0$, und $r_2 < 0$.

$$\frac{h}{r_1} = \sin\gamma_1 \approx \gamma_1$$

$$-\frac{h}{r_2} = \sin\gamma_2 \approx \gamma_2$$

$$\frac{h}{f} = \tan\beta \approx \beta$$



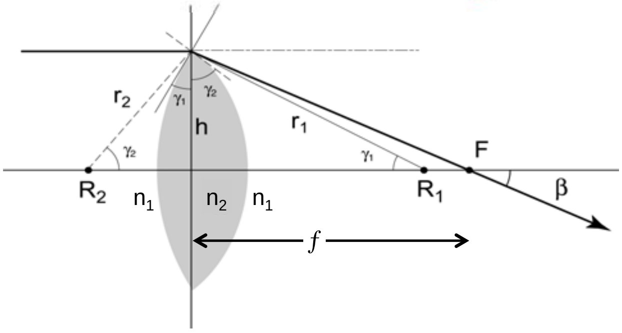
Linsenspitze als Prisma denken

$$\frac{h}{f} = \beta = \frac{n_2-n_1}{n_1}\cdot(\gamma_1+\gamma_2) = \frac{n_2-n_1}{n_1}\cdot\left(\frac{h}{r_1}-\frac{h}{r_2}\right)$$

Linsenschleifergleichung für dünne Linsen

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2-n_1}{n_1}\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

Abbildung durch dünne Linsen



Wir setzen $n_1 = 1$ ($\approx$ Luft) und $n_2 = n$ und erhalten so eine vereinfachte Form:

Linsenschleifergleichung für dünne Linsen

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

⇒ **Vordere und hintere Brennweite sind gleich**! (Leicht ersichtlich durch vertauschen von r_1 mit r_2 und Berücksichtigung der Vorzeichen der Krümmungsradien $r_1 \to -r_2$ und $r_2 \to -r_1$).

Die **Linsengleichung gilt auch für konkave Flächen (Streulinsen)**, sofern die Vorzeichen der Krümmungsradien korrekt berücksichtigt werden.

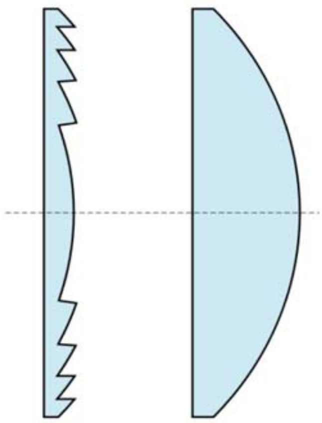
Die ***Brechkraft D*** einer Linse ist definiert als der Kehrwert ihrer Brennweite $D = 1/f$.
Die dazu gehörige Einheit ist die **Dioptrie [D]**, wobei gilt: $1\ D = 1\ m^{-1}$ in SI Einheiten.

Die **Brechkraft *D*** einer Linse ist abhängig von **Medium n_1**, in dem die Linse eingesetzt wird!
z.Bsp. hat dieselbe Linse in Luft oder in Wasser eine unterschiedliche Brechkraft.

$$D \equiv \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Fresnel Linse

Augustin Jean Fresnel
* 10. Mai 1788 in Broglie (Eure)
† 14. Juli 1827 in Ville-d'Avray bei Paris



Fresnellinse Herkömmliche Linse

Lichtquelle und Fresnellinse eines Leuchtturms in Bremerhaven

Eine **Fresnel-Linse** erlaubt die Konstruktion von **grossen Linsen** mit trotzdem **kurzer Brennweite** wobei Gewicht und Volumen wesentlich verringert sind im Vergleich zu einer herkömmlichen Linse. Ursprünglich wurde die Fresnel Linse für Leuchttürme entwickelt.

Abbildung durch dünne Linsen

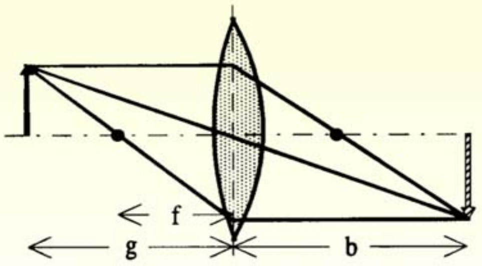
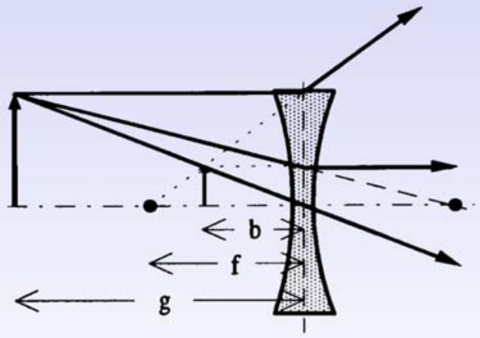


Abbildung durch **Sammellinse.**
Brennweite f, Gegenstandsweite g und **Bildweite b** sind alle **positiv.**
Das **Bild** ist **reell.**

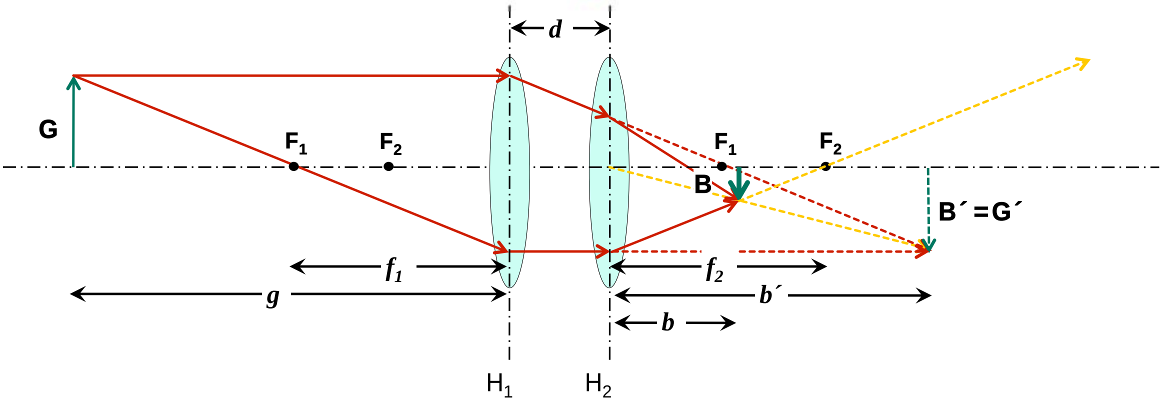


Bei **Zerstreuungslinsen** ist die **Brennweite f negativ**.
Damit wird auch die **Bildweite b negativ** und das **Bild** ist **virtuell**. Die Strahlen sind nach der Linse **divergent**, ihre Verlängerungen rückwärts ergeben ein virtuelles Bild.

Die **Abbildungsgleichung** für dünne Linsen ist identisch mit jener für den sphärischen Hohlspiegel (**Vorzeichen beachten!**):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Linsensystem



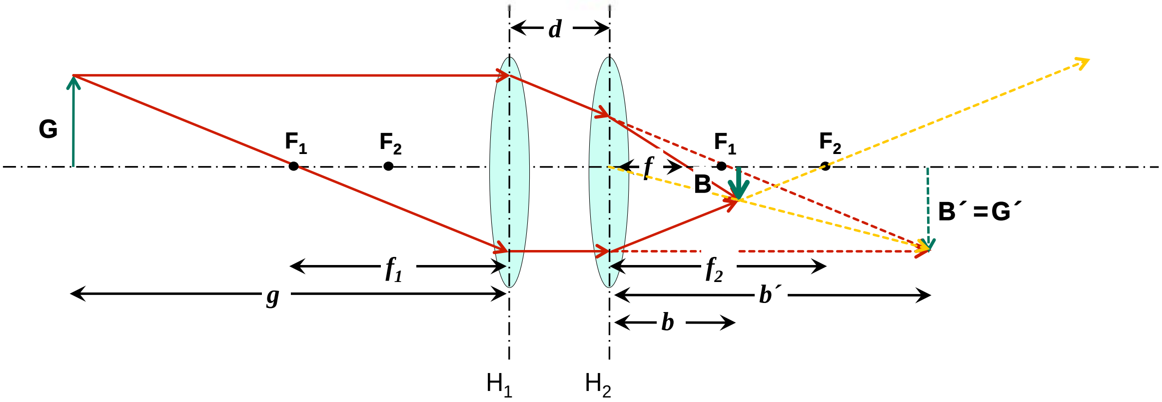
Bei einem **Linsensystem** wird erst das **Zwischenbild B´** so konstruiert, als ob Linse 2 nicht da wäre.
Danach ist B´ der virtuelle Gegenstand G´ für die weitere Bildkonstruktion von B.
(rückwärtige Verlängerung von Lichtstrahlen!)

Die Bildweite b' ist durch die Distanz von Linse 2 definiert. Die Abbildungsgleichung muss demnach den Abstand d der beiden Linsen berücksichtigen:

$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b'+d}$ b' ist nun Gegenstandsweite für die Abbildung an Linse 2; somit gilt: $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{-b'} + \frac{1}{b}$

und die endgültige Bildweite b lässt sich so berechnen...

Linsensystem



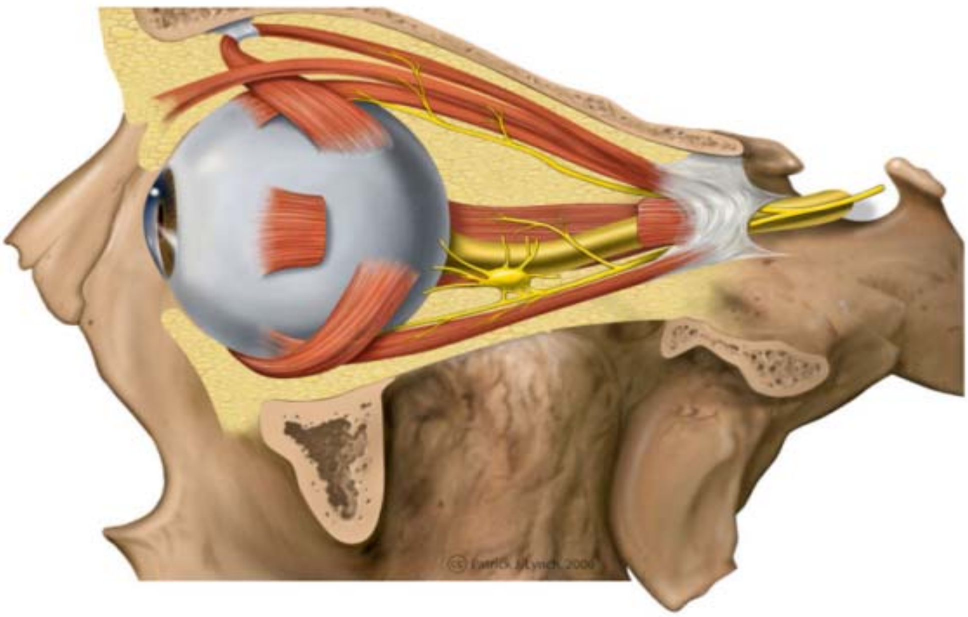
Für die gesamt Brechkraft des Linsensystems gilt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad \xrightarrow{d \approx 0} \quad \frac{1}{f} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

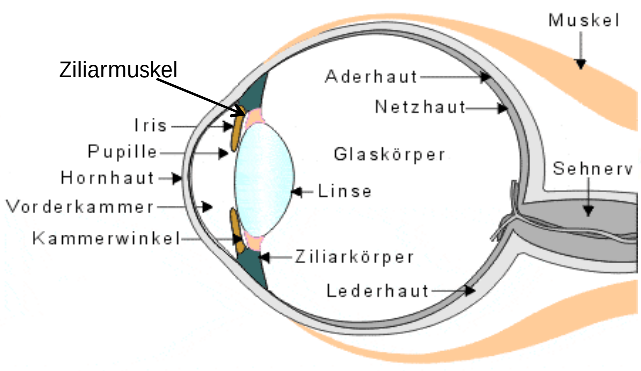
Bei kleinem Abstand d ≈ 0 addieren sich also die Kehrwerte der Brennweiten.

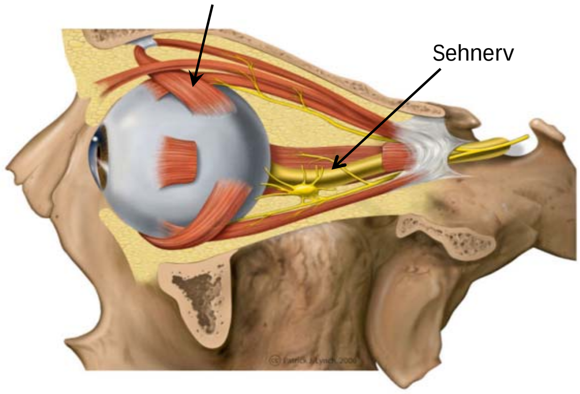
Geometrische Optik

Das Auge



Geometrische Optik des menschlichen Auges





Gegen aussen ist das Auge durch die **Hornhaut** abgeschlossen.
Es folgt die **vordere Augenkammer**, dann die **Augenlinse**.
Die **Krümmungsradien der Augenlinse** können durch Betätigen der **Ziliarmuskeln** verändert werden.

Der an die Linse anschliessende **Glaskörper** ist mit einer **gallertartigen Masse** gefüllt, die den **gleichen Brechungsindex wie das Kammerwasser** hat.

Zahlen und Fakten

Für ein mittleres menschliches Auge betragen die **Krümmungsradien:**

Vorderfläche Hornhaut:
r = 0.0078 m

Vorderfläche Linse:
r_1 = 0.010 m (Fernakkommodation)
r_1' = 0.0056 m (Nahakkommodation)

Hinterfläche Linse:
r_2 = 0.006 m (Fernakkommodation)
r_2' = 0.0055 m (Nahakkommodation)

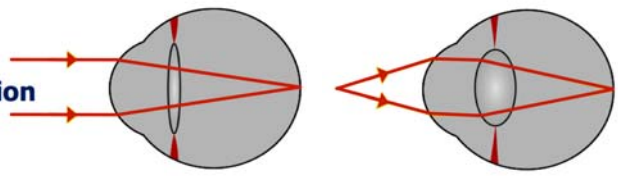
und für die **Brechungsindizes**:

Umgebung (Luft):
n = 1.00

Glaskörper, Kammerwasser:
n' = 1.336

Linse:
n'' = 1.41

Fernakkommodation



Nahakkommodation

Damit kann man die Brechkraft des Auges für Fern- und für Nahakkommodation berechnen.

Brechkraft des Auges

Zur Berechnung der Brechkraft des Auges verwenden wir einige frühere Resultate:

Brennweite bei Brechung an sphärischer Fläche $\longrightarrow$ Hornhaut:

$$f_1 = r \cdot \frac{n_1}{n_1 - n_2}$$

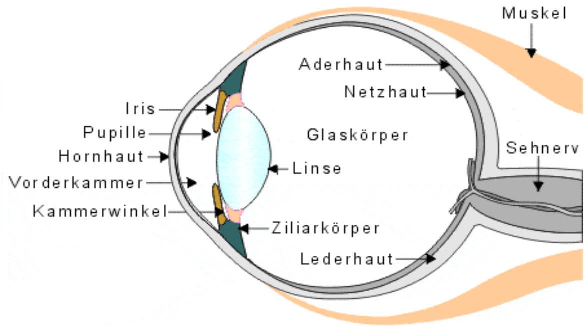
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{r} \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

Linsengleichung für dünne Linsen

$$D = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Gesamtbrechkraft

$$\frac{1}{f_{tot}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$



Brechkraft des Auges

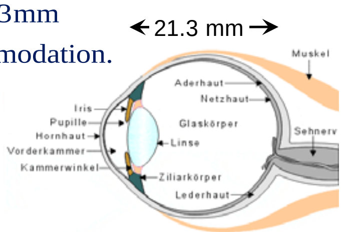
		hintere Brennweite:	Brechkraft $1/f$
Hornhaut:	$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{r} \cdot \frac{n' - n}{n'}$	$f_1 = 31\,\text{mm}$	32.2 D
Linse:	$\frac{1}{f_2} = \frac{n'' - n'}{n'} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$	$f_2^{Fern} = 6.77\,\text{mm}$	14.8 D
		$f_2^{Nah} = 50.1\,\text{mm}$	20.0 D
Total :	$\frac{1}{f_{tot}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$	$f_{tot}^{Fern} = 21.3\,\text{mm}$	47.0 D
		$f_{tot}^{Nah} = 19.2\,\text{mm}$	52.2 D

Die Bildweite ist durch die Dimension des Glaskörpers auf $b = 21.3\text{mm}$ vorgegeben; diese entspricht gerade der Brennweite bei Fernakommodation.

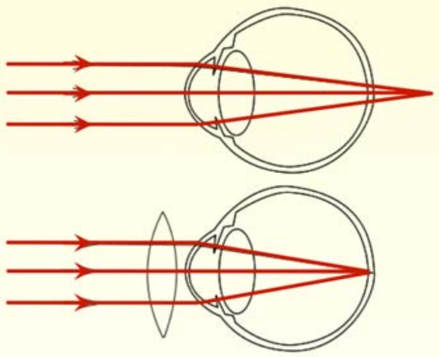
Bei Nahakkomodation kann ein Gegenstand im Abstand

$$\frac{1}{f_{tot}^{Fern}} = \frac{1}{b} = \frac{1}{f_{tot}^{Nah}} - \frac{1}{g} \quad \Rightarrow \quad g = 195mm$$

gerade noch scharf auf die Netzhaut abgebildet werden.



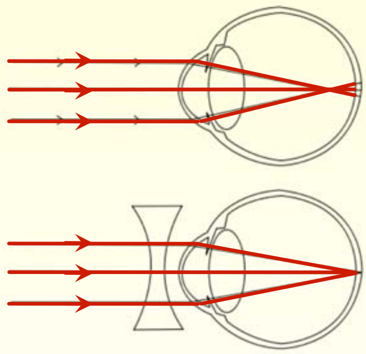
Hyperopie und Myopie



Strahlengang am weitsichtigen Auge – Hyperopie:

Beim unkorrigierten **Auge** liegt der Brennpunkt **hinter der Netzhaut**. Ein unscharfer Sehein-druck ist die Folge.

Durch eine **Sammellinse** kann der Brennpunkt nach vorne auf die Netzhautebene verschoben werden und einen scharfen Seheindruck ermöglichen.



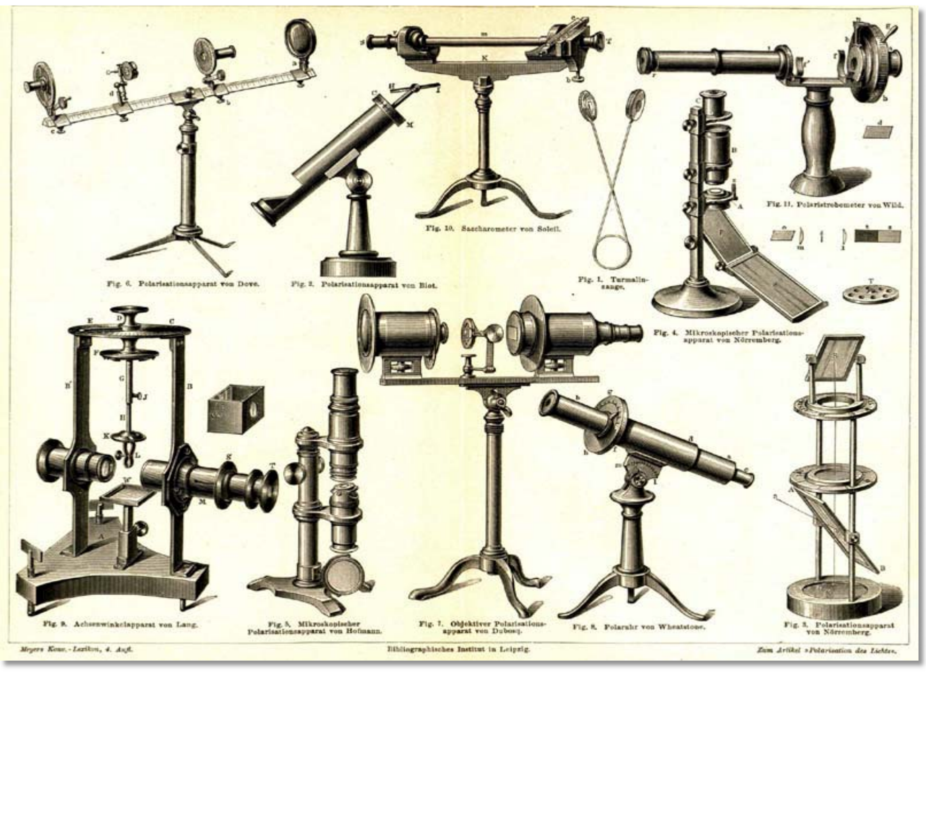
Strahlengang am kurzsichtigen Auge – Myopie:

Beim unkorrigierten **Auge** liegt der Brennpunkt **vor der Netzhaut**. Ein unscharfer Seheindruck ist die Folge.

Durch eine **Streulinse** kann der Brennpunkt nach hinten auf die Netzhautebene verschoben werden und einen scharfen Seheindruck ermöglichen.

Geometrische Optik

Optische Instrumente



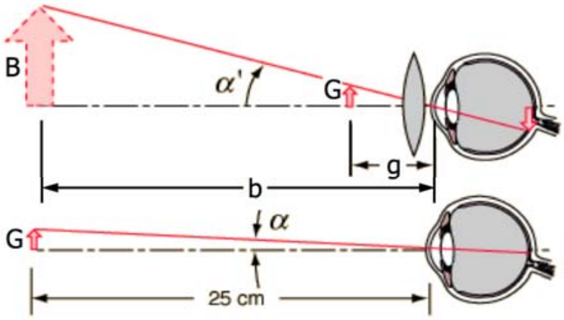
Abbildungsmassstab und Vergrösserung

Man unterscheidet zwischen Abbildungsmassstab und Vergrösserung:

$$\text{Abbildungsmassstab:} \quad A = \frac{\text{Bildgrösse}}{\text{Gegenstandsgrösse}} = \frac{B}{G} = \frac{|b|}{|g|}$$

$$\text{Vergrösserung:} \quad V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}} = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Der **Sehwinkel** wird bei kleinen Gegenständen vergrössert, indem man sie näher ans Auge bringt. Allerdings können Gegenstände nur bis zu einer Minimaldistanz scharf gesehen werden. Diese Minimaldistanz ist von Mensch zu Mensch verschieden und stark vom Alter abhängig.



Als *natürliche Sehweite* wird s_0 = 0.25 m definiert.

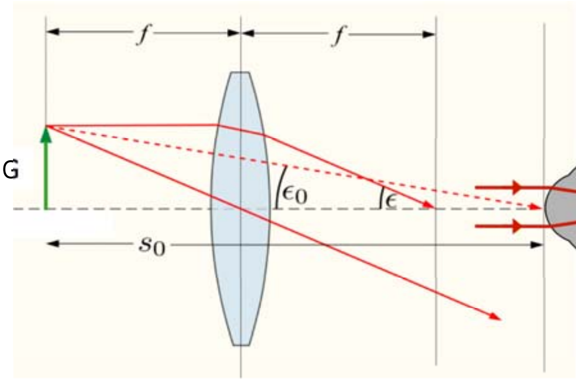
Lupe

Die Lupe ist eine Sammellinse mit kleiner Brennweite, welche es gestattet, einen Gegenstand aus kleinerer Distanz als der natürlichen Sehweite s_0 scharf zu betrachten. **Dadurch vergrössert sich der Sehwinkel.**

Befindet sich der **Gegenstand in der Brennebene** der Lupe, kann das **auf unendlich akkommodierte Auge** den Gegenstand auf der Netzhaut scharf abbilden.

Die Vergrösserung der Lupe bei Fernakkommodation des Auges beträgt:

$$V = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx \frac{\tan\varepsilon}{\tan\varepsilon_0} = \frac{G/f}{G/s_0} = \frac{s_0}{f}$$



Lupe – Nahakkomadation

Falls man das **Auge auf die natürliche Sehweite s_0 nahakkomodiert**, kann der Gegenstand noch etwas näher an die Lupe gebracht werden, so dass sich **der Gegenstand zwischen Brennebene und Lupe** befindet.

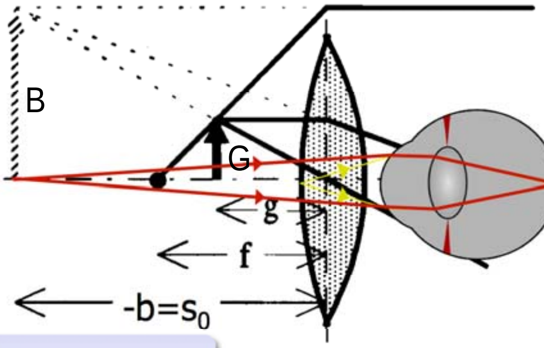
Die Lupe wird dabei nah an das Auge gehalten, so dass in der Abbildungsgleichung für die **Bildweite b = -s_0** eingesetzt wird. (Das Minuszeichen ist durch das virtuelle Bild bedingt)

Es gilt selbstverständlich die Abbildungsgleichung:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{g}$$

Daraus folgt:

$$\frac{|b|}{g}=\frac{|b|}{f}-\frac{|b|}{b}$$

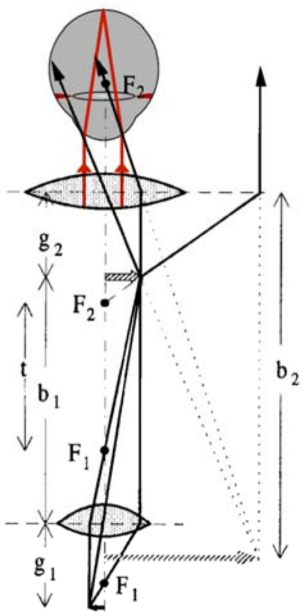


Der Abbildungsmassstab beträgt schliesslich:

$$\Rightarrow A=\frac{B}{G}=\frac{|b|}{g}=\frac{|b|}{f}-\frac{|b|}{b}=\frac{s_0}{f}-\frac{s_0}{-s_0}=\frac{s_0}{f}+1$$

Mikroskop

Eine **wesentlich stärkere Vergrösserung** als mit der Lupe erreicht man mit dem **Mikroskop**.
Das Objektiv entwirft vom Gegenstand ein vergrössertes **reelles Zwischenbild**.
Dieses wird durch das Okular wie mit einer Lupe betrachtet



Okular

Objektiv

Die **Gegenstandsweite g_1** ist in der Realität **nur wenig grösser als die Brennweite f_1** der Objektlinse, so dass der Abbildungsmassstab für das Zwischenbild wesentlich grösser ist, als in nebenstehender Figur. Er beträgt:

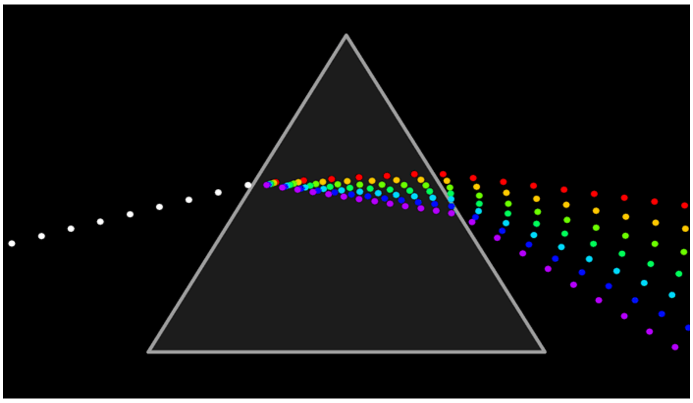
$$A=\frac{b_1}{g_1}=b_1\left(\frac{1}{f_1}-\frac{1}{b_1}\right)=\frac{b_1}{f_1}-1=\frac{b_1-f_1}{f_1}=\frac{t}{f_1}$$

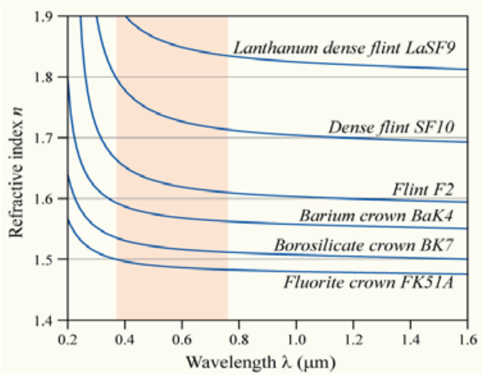
Die **optische Tubuslänge $t=b_1-f_1$** ist bei gebräuchlichen Mikroskopen **≈160 mm** und entspricht ungefähr der Länge des ganzen Tubus.

Das **Zwischenbild wird mit dem Okular der Brennweite f_2 nochmals vergrössert**. Diese Vergrösserung entspricht jener der Lupe, so dass für die gesamte Vergrösserung folgt:

$$V=\frac{t}{f_1}\cdot\frac{s_0}{f_2}$$

Brechung an Prisma – Dispersion





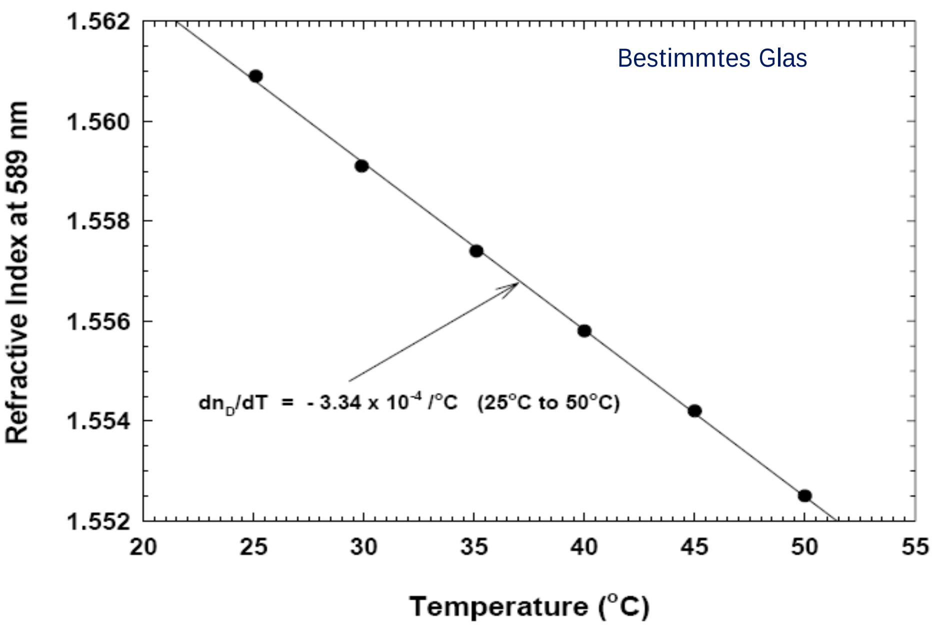
Dispersionsrelation für verschiedene Gläser

Der **Brechungsindex** eines Materials ist keine Konstante, sondern eine **Funktion der Wellenlänge**, wobei **kleine Wellenlängen stärker gebrochen** werden als grosse, und entsprechend einen **grösseren Brechungsindex** haben. Dies wird als **Dispersion** bezeichnet.

Die Funktion $n = n(\lambda)$ ist die Dispersionsrelation

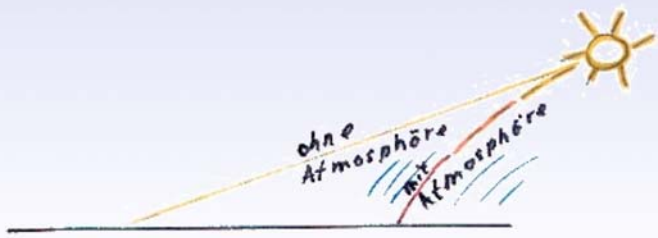
Entsprechend spaltet sich **weißes Licht** in die **Farbfolge Rot**, **Orange**, **Gelb**, **Grün**, **Blau**, **Violett** auf, sobald es durch ein Prisma geschickt wird.

Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex



Der **Brechungsindex** eines Materials bei konstanter Wellenlänge ist eine **Funktion der Temperatur**.

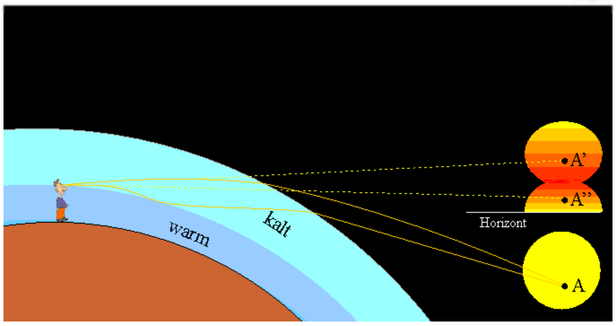
Kontinuierliche Brechung



Der **Brechungsindex** eines Materials kann kontinuierlich variieren, was zu **gleichförmig gekrümmten Lichtstrahlen** führen kann.

- In einer **Salzlösung** nimmt die Salzkonzentration mit der Höhe ab.
- **Temperatur- und Dichte der Atmosphäre** verändern sich meist kontinuierlich mit der Höhe.
  - Spezielle Wetterlagen können aber auch zu Schichten führen, die als Grenzflächen bei der Lichtbrechung wirken.

Sonnenuntergang



Sonnenlicht wird zur Erde hin gebrochen, was dazu führt, dass die Sonne noch zu sehen ist, auch wenn sie eigentlich schon seit Minuten untergegangen ist.

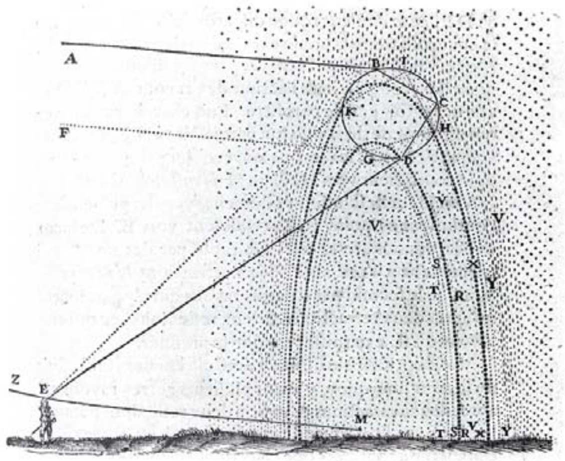
Blaues Licht wird **stärker abgelenkt** als Licht aus dem roten Teil des Sonnenspektrums (**Dispersion**), deshalb erscheint der Himmel blau und die untergehende Sonne rot, da das blaue Licht durch den langen Weg durch die Atmosphäre so stark abgelenkt wurde, dass es nicht mehr den Beobachter am Boden erreicht.

Lichtstrahlen vom unteren Sonnenrand treffen **flacher** auf die Atmosphäre auf als die vom oberen Rand und **werden stärker gebrochen** als Licht vom oberen Rand. Der untere Rand wirkt also stärker angehoben und somit **erscheint die Sonne unten platt gedrückt**.

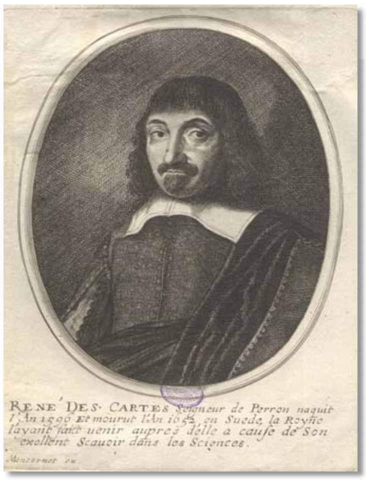
Reflexion von Lichtstrahlen an der **Grenzfläche** zwischen **verschieden warmen Luftschichten** führt hier zu einer scheinbaren doppelten Sonne, was bei günstigen Wetterbedingungen auftreten kann.

Der Regenbogen

Die physikalisch korrekte Beschreibung geht auf *René Descartes* zurück, der um 1637 dazu die geometrische Optik verwendet hat.



Essais Philosophiques 1637
Zeichnung von Descartes zur Erklärung der Regenbogenentstehung



René Descartes
* 31. März 1596 in La Haye/Touraine, Frankreich
† 11. Februar 1650 in Stockholm, Schweden

Isaac Newtons Theorie des Lichtes von **1704** brachte die **Dispersion** ins Spiel und machte so die **Farbenpracht** verständlich.
Eine weitergehende Erklärung basierend auf der **Wellenoptik** wurde von ***George Airy*** um **1849** geliefert. Damit können Effekte der **Tröpfchengrösse** verstanden werden.

Der Regenbogen

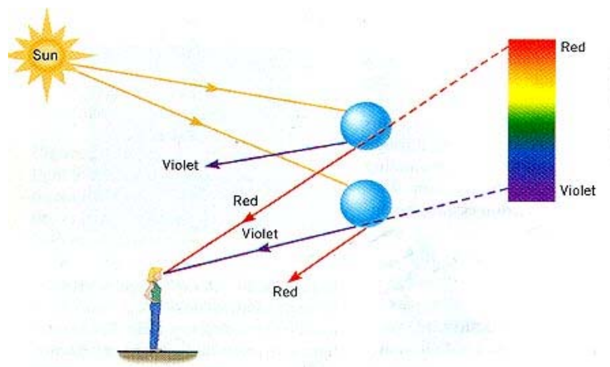
Der Hauptregenbogen kommt zustande, indem **Lichtstrahlen in die Wassertröpfchen eindringen**, an der **Innenfläche einmal reflektiert** werden und **dann wieder austreten**.

Die Sonne muss also im Rücken des Beobachters stehen, der auf eine genügend grosse Zahl von Wassertröpfchen (→ Regen) schaut.

Beim Ein- und Austritt des Lichtstrahls aus den Wassertröpfchen tritt Brechung auf.
Da der **Brechungsindex n von der Wellenlänge abhängt,** werden **verschiedene Farbanteile** im Licht **verschieden stark gebrochen**.

Durch die **sphärische Form der Tröpfchen** werden die Strahlen **bei einem bestimmten Sichtwinkel gebündelt**, was den Regenbogen erst sichtbar macht.

Der rot-orange Teil des Hauptregenbogens liegt über dem violetten.



Der Regenbogen

Es gilt (Zentrum des Wassertröpfchens):

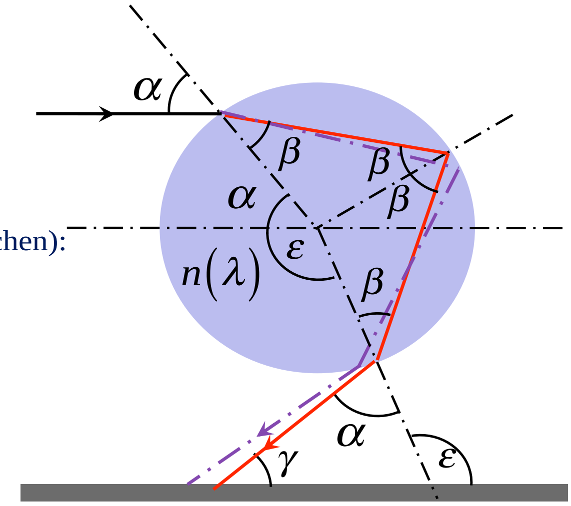
$$2\pi = \varepsilon + \alpha + 2\cdot(\pi - \beta - \beta)$$

$$\Rightarrow \ \varepsilon = 4\beta - \alpha$$

weiter gilt (Dreieck unter dem Wassertröpfchen):

$$\pi = \gamma + \alpha + (\pi - \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \gamma + \alpha$$



Strahlengang durch einen Wassertropfen (Die eingezeichneten Winkel gelten für den durchgezogenen roten Strahl)

Somit gilt folgende Beziehung zwischen
Einfallswinkel α
Reflexionswinkel β
und **Sichtwinkel** γ
für den Hauptregenbogen:

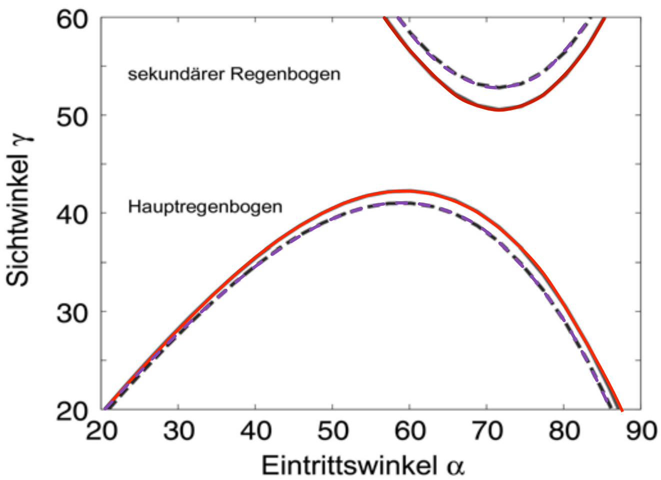
$$\gamma = 4\beta - 2\alpha$$

Der Regenbogen

mit $\gamma = 4\beta - 2\alpha$

und $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_\lambda \quad \Rightarrow \beta = \arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n_\lambda}$

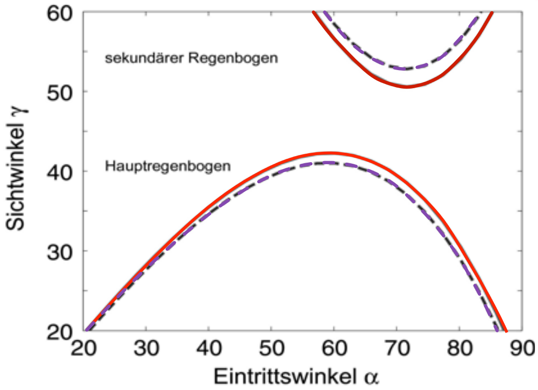
folgt: $\gamma = 4\cdot\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n_\lambda} - 2\alpha$

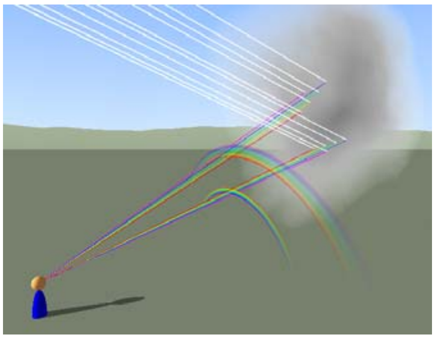


Die **Funktion γ(α)** ist in der unteren Kurve (Hauptregenbogen) dargestellt.
Die Bündelung der Strahlen tritt dort auf, wo **verschiedene Einfallswinkel** α **nahezu gleiche Sichtwinkel** γ **ergeben.**
Das ist beim relativen Maximum der Fall, d.h. dγ/dα = 0 setzen und nach α auflösen ergibt:

$$\alpha_{\max} = \arccos\sqrt{\frac{1}{3}\left(n_\lambda^2 - 1\right)}$$

Der Regenbogen

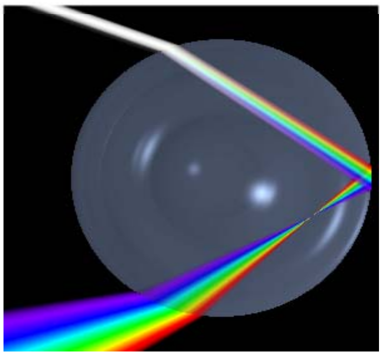




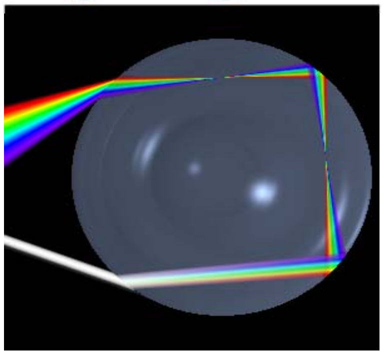
Farbe	λ	n_λ	α_{max}	β	γ
rot-orange	632.8 nm	1.3317	59.49°	40.31°	**42.27°**
violett	434 nm	1.34034	58.98°	39.79°	**41.02°**

$$\alpha_{\max} = \arccos\sqrt{\frac{1}{3}\left(n_\lambda^2 - 1\right)}$$

Primärer und Sekundärer Regenbogen



primärer Regenbogen
bei einfacher Reflexion



sekundärere Regenbogen
bei zweifacher Reflexion

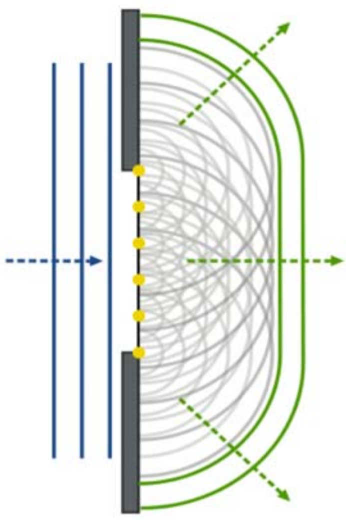
Der **sekundäre Regenbogen** wird durch diejenigen Lichstrahlen gebildet, die im Innern der Tröpfchen **zweimal reflektieren**.

Bei diesem ist die **Farbabfolge umgekehrt**: der violette Sekundärbogen liegt über dem rot-orangen.
Der Sekundärregenbogen ist sehr schwach, da die Reflexionen nicht total sind, und somit jedesmal ein Teil des Lichts aus dem Tropfen austritt.

Regenbogen noch höherer Ordnung (d.h. mit mehr als zwei Reflexionen) sind zu schwach, um beobachtet zu werden.

Wellenoptik

Interferenz, Beugung & Polarisation

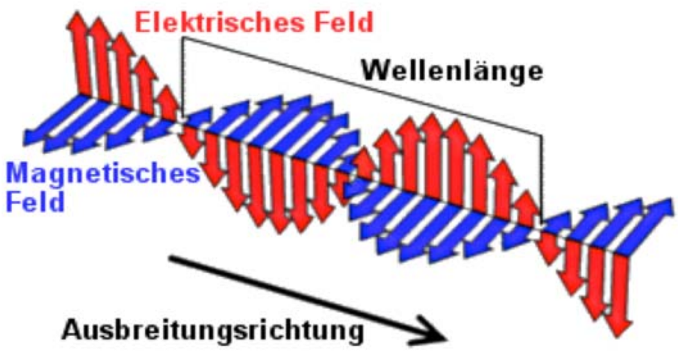


Elektromagnetische Wellen

Sichtbares **Licht ist eine elektromagnetische Welle** mit
Wellenlängen zwischen **360 nm** und **780 nm**.

Mit der **Wellenoptik** sind vor allem die Begriffe **Interferenz, Kohärenz, Beugung** und, da Licht eine Transversalwelle ist, **Polarisation** verbunden.

Die Interferenz ist das wichtigste Charakteristikum von Wellen.
Sie beruht auf dem Superpositionsprinzip.



Ebene Lichtwelle

Eine ebene Lichtwelle, die sich in x-Richtung ausbreitet, wird dargestellt durch:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi)$$

wobei $\vec{E}$ der elektrische Feldvektor der elektromagnetischen Welle angibt.
x und t sind Orts- und Zeit-Koordinaten.
x ist im Allgemeinen ein dreidimensionaler Vektor $\vec{x}$.

k ist im Allgemeinen ein dreidimensionaler Vektor $\vec{k}$ und wird Wellenvektor bezeichnet.
Der Wellenvektor $\vec{k}$ gibt die Ausbreitungsrichtung der Welle an.

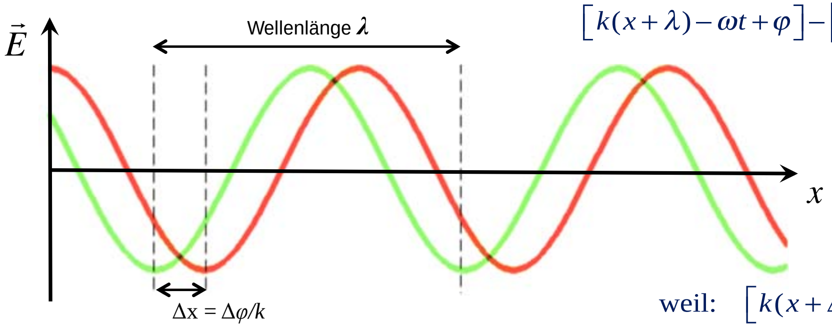
$|k|$ ist die Wellenzahl und hängt mit der Kreisfrequenz ω, der Lichtgeschwindigkeit c, sowie der Wellenlänge λ wie folgt zusammen:

$$|k| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \qquad \left[k\right] = m^{-1}$$

φ ist die Phase.

Ebene Lichtwelle

$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi)$



Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ ist 2π wenn sich x um eine ganze Wellenlänge λ erhöht:

$$[k(x+\lambda) - \omega t + \varphi] - [kx - \omega t + (\varphi + 2\pi)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad k\lambda - 2\pi = 0$$

somit gilt für die Wellenzahl k:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

weil: $[k(x+\Delta x) - \omega t + \varphi_1] - [kx - \omega t + \varphi_2] = 0$

$\Rightarrow k\Delta x = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ $\qquad$ φ ist die Phase

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle ist die Lichtgeschwindigkeit c:

$c = \dfrac{\lambda}{T}$ wobei T die Periodendauer ist.

$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ wobei f die Frequenz und $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz bedeuten.

und somit folgt folgende wichtige Beziehung für die Wellenzahl: $\boxed{k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{cT} = \dfrac{\omega}{c}}$

Überlagerung mehrerer Wellen

Bei der Überlagerung mehrerer Wellen addieren sich die Amplituden und nicht die Intensitäten. Dadurch kann es zu lokalen Auslöschungen und Verstärkungen, so genannten Interferenzen, kommen.

Überlagerung von zwei Wellenzügen $(i = 1,2)$ mit gleicher Amplitude y_0:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_0 \cdot \sin(k_1 \cdot x - \omega_1 \cdot t + \varphi_1) + y_0 \cdot \sin(k_2 \cdot x - \omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

Dies lässt sich mit den Additionstheorem von Sinusfunktionen in ein Produkt umformen:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

und somit gilt:

$$y(x,t) = 2 \cdot y_0 \cdot \sin\frac{(k_1+k_2)\cdot x - (\omega_1+\omega_2)\cdot t + (\varphi_1+\varphi_2)}{2} \cdot \cos\frac{(k_1-k_2)\cdot x - (\omega_1-\omega_2)\cdot t + (\varphi_1-\varphi_2)}{2}$$

Überlagerung von Wellen gleicher Wellenlänge

$$y(x,t) = 2 \cdot y_0 \cdot \sin\frac{(k_1+k_2)\cdot x-(\omega_1+\omega_2)\cdot t+(\varphi_1+\varphi_2)}{2}\cdot\cos\frac{(k_1-k_2)\cdot x-(\omega_1-\omega_2)\cdot t+(\varphi_1-\varphi_2)}{2}$$

Falls: $\lambda_1 = \lambda_2 \quad \to \omega_1 = \omega_2 \quad \to |k_1| = |k_2|$. Das Vorzeichen von k gibt die Ausbreitungsrichtung der Welle an.

Weiter unterscheiden wir folgende Fälle:

$\omega_1 = \omega_2$, $k_1 = k_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$

GleicheWellenlänge, gleicheAusbreitungsrichtung und gleiche Phase.

$$y(x,t) = 2\cdot y_0 \cdot \sin(k\cdot x-\omega\cdot t+\varphi)\cdot\underbrace{\cos(0)}_{1}$$

Die beiden Wellen überlagern sich zu einer Welle mit gleicher Frequenz und gleichem Phasenwinkel und doppelter Amplitude.

$\Rightarrow$ **konstruktive Interferenz**

$\omega_1 = \omega_2$, $k_1 = k_2$ und $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$

GleicheWellenlänge, gleicheAusbreitungsrichtung und Phasenverschiebung π.

$$y(x,t) = 2\cdot y_0 \cdot \sin(k\cdot x-\omega\cdot t+\varphi)\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} = 0$$

Die beiden Wellen löschen sich aus.

$\Rightarrow$ **destruktive Interferenz**

Stehende Wellen

$$y(x,t) = 2 \cdot y_0 \cdot \sin\frac{(k_1+k_2)\cdot x-(\omega_1+\omega_2)\cdot t+(\varphi_1+\varphi_2)}{2}\cdot\cos\frac{(k_1-k_2)\cdot x-(\omega_1-\omega_2)\cdot t+(\varphi_1-\varphi_2)}{2}$$

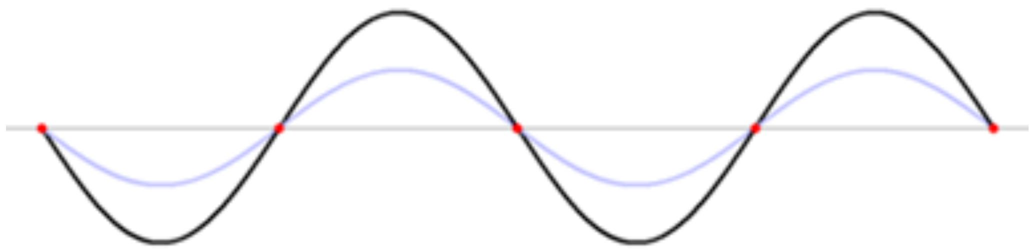
$\omega_1 = \omega_2$, $k_1 = -k_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$

GleicheWellenlänge, entgegengesetzte Ausbreitungsrichtung und gleiche Phase.

$$\begin{aligned} y(x,t) &= 2\cdot y_0\cdot\sin(-\omega\cdot t+\varphi)\cdot\cos(kx) \\ &= -2\cdot y_0\cdot\cos(kx)\cdot\sin(\omega\cdot t-\varphi) \\ &= \underbrace{2\cdot y_0\cdot\cos(kx+\pi)}_{\text{Ortsabhängige Amplitude}}\cdot\sin(\omega\cdot t-\varphi) \end{aligned}$$

Es entsteht eine **stehende Welle**.

Die Amplitude hängt vom Ort x ab. An bestimmten Punkten, sogenannten Knotenpunkten, verschwindet die Amplitude.



Schwebung

Werden Wellen überlagert, deren Wellenlängen λ_i sich geringfügig unterscheiden, kommt es zu einer Schwebung.

$\omega_1 \approx \omega_2,\ k_1 \approx k_2$ Ähnliche Wellenlängen, gleicheAusbreitungsrichtung, beliebige, aber feste Phasen .

$$y(x,t) = 2 \cdot y_0 \cdot \sin \frac{(k_1+k_2)\cdot x - (\omega_1+\omega_2)\cdot t + (\varphi_1+\varphi_2)}{2} \cdot \cos \frac{(k_1-k_2)\cdot x - (\omega_1-\omega_2)\cdot t + (\varphi_1-\varphi_2)}{2}$$

$\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2} \approx \omega$ $\rightarrow$ Mittelwert der beiden Kreisfrequenzen der beiden Wellen.

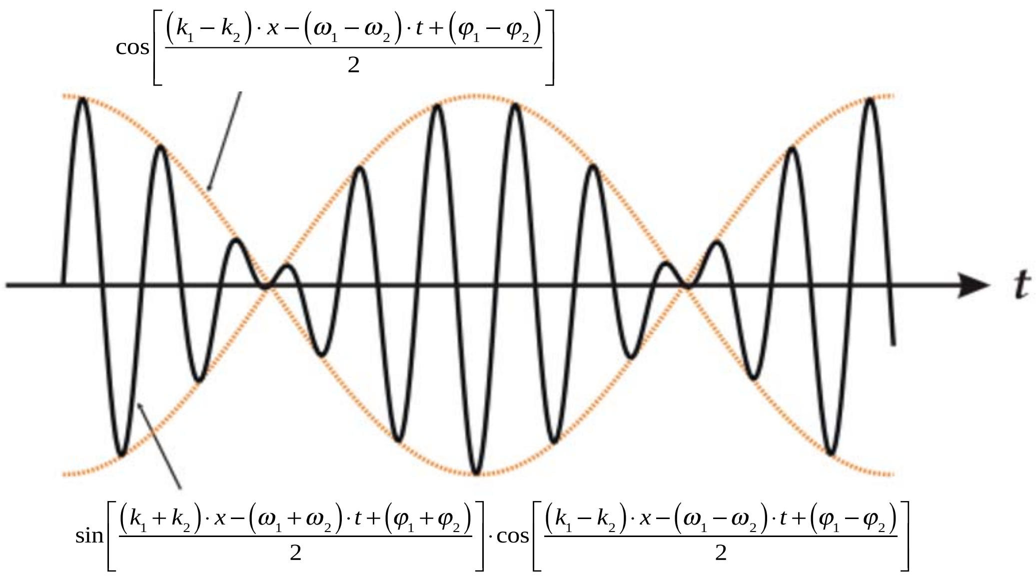
für die zugehörige Frequenz gilt dann $f_M = \dfrac{\omega}{2\pi}$

$\omega_1 - \omega_2 \equiv \Omega$ für die Schwebungsfrequenz gilt $f_S = \dfrac{\Omega}{2\pi}$
diese führt zu einer Modulation der Grundschwingung mit der Modulationsfrequenz f_M.

In der **Akustik** ist die **Schwebung** deutlich zu hören: Erklingen zwei Töne, deren Frequenzen sich nur wenig unterscheiden, so ist ein Ton zu hören, dessen Frequenz dem Mittelwert der Frequenzen der beiden überlagerten Töne entspricht. Dieser Ton ist moduliert, seine Lautstärke schwankt mit der sogenannten Schwebungsfrequenz, die der Differenz der Frequenzen der beiden Töne entspricht.

Schwebung

$$y(x,t) = 2 \cdot y_0 \cdot \sin \frac{(k_1+k_2)\cdot x - (\omega_1+\omega_2)\cdot t + (\varphi_1+\varphi_2)}{2} \cdot \cos \frac{(k_1-k_2)\cdot x - (\omega_1-\omega_2)\cdot t + (\varphi_1-\varphi_2)}{2}$$



Kohärenzlänge

Eine wesentliche Bedingung für die Beobachtung stationärer Interferenzmuster ist die **Kohärenz** der beteiligten Wellen.

Zwei Wellen werden kohärent genannt, wenn die gegenseitige Phasenbeziehung während der Beobachtungszeit konstant bleibt.

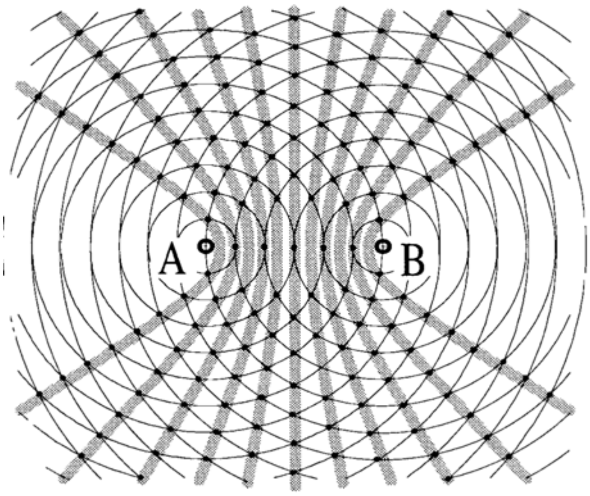
Wellen, die von zwei verschiedenen Lichtquellen ausgesandt werden, können nicht interferieren, da das Licht ja von unterschiedlichen spontan emittierenden Atomen stammt.
Zur Interferenz von Lichtwellen kommt es nur, wenn die interferierenden Lichtwellen **von demselben Punkt einer Lichtquelle** stammen.

Die **Zeit *t***, während der **ein Atom Licht aussendet**, ist von der **Grössenordnung 10^{-8} s**. Dies ergibt **Wellenzüge** mit der Länge in der Grössenordnung von **3 m**.

Bei **grossen Temperaturen** und **hohen Dichten** sind die **Emissionszeiten** und damit die Länge der **Wellenzüge kleiner**.

Lichtquelle	Kohärenzlänge
weisses Licht:	$1.5 \cdot 10^{-6}$ m
Spektrallampe :	0.2 m
Kr-Spektrallampe auf T = 77 K gekühlt:	0.8 m
Halbleiterlaser:	1.5 m
HeNe-Laser:	2000 m

Interferenz von Licht zweier kohärenten Punktquellen



Von den beiden Punktquellen gehen **Kugelwellen** aus.

An verschiedenen Orten des Raumes gibt es ein **Interferenzmuster**.

Die Kreise geben **Wellenberge** zu jenem Zeitpunkt an, in dem die Amplitude in den emittierenden Punkten auch gerade maximal ist.

Die **schwarzen Punkte** charakterisieren jene Stellen, bei denen sich die momentanen Amplituden zu einem Maximum addieren.

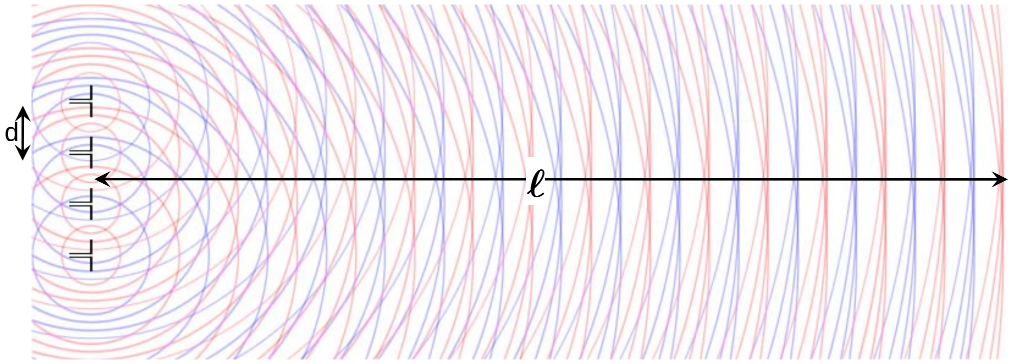
Orte, die von zwei Quellen in A und B (Abstand d) einen **konstanten Abstandsunterschied** (→ **Gangunterschied: n·λ**) haben, sind Hyperbeln mit den Brennpunkten A und B.

Deshalb bilden die Orte maximaler Amplitude eine **Schar von konfokalen Hyperbeln.**

Nahfeld und Fernfeld

Man unterscheidet beim Interferenzmuster ein **Nahfeld** und ein **Fernfeld**.

Im **Fernfeld** können die **Hyperbeln durch ihre Asymptoten** und die **Kugelwellen durch ebene Wellen** angenähert werden.



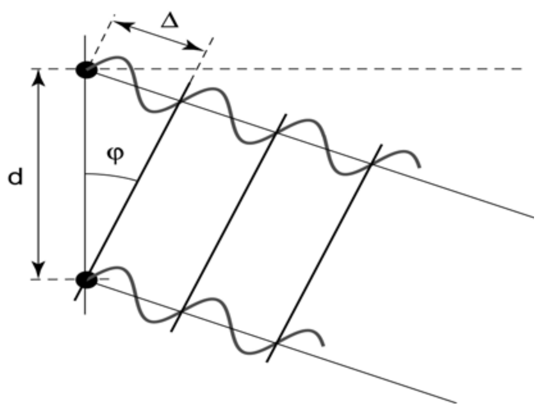
annähernd ebene Welle

Die Bedingung, damit die **Fernfeldnäherung** angewandt werden darf, ist:

$$\ell \gg \frac{d}{\lambda} \cdot d \quad \rightarrow \quad \ell \cdot \lambda \gg d^2$$

wobei d die Distanz zwischen den Quellen und ℓ die Entfernung von den Quellen ist.
Im **Fernfeld** sind die **Wellenfronten annähernd parallel.**

Interferenz von Licht zweier kohärenten Punktquellen



Im **Fernfeld** sind die **Wellenfronten annähernd parallel**.

Somit gilt für den **Gangunterschied Δ:**

$$\Delta = d \cdot \sin\varphi$$

Für **Interferenzmaxima** ist der Gangunterschied Δ ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge **Δ=nλ**.

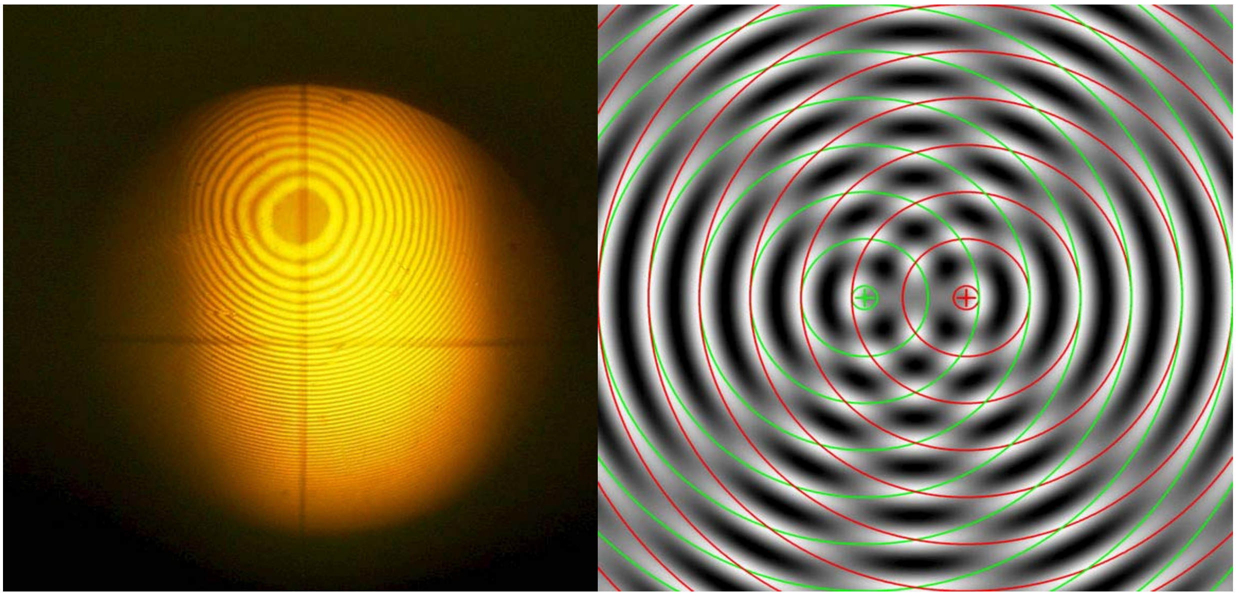
Es gilt daher für **Interferenzmaxima**:

$$\sin\varphi_{n,\max} = \frac{n \cdot \lambda}{d} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

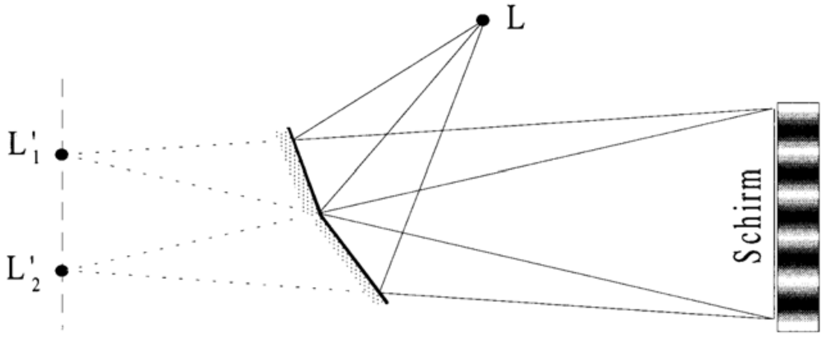
Und entsprechend für **Interferenzminima**:

$$\sin\varphi_{n,\min} = \frac{(n + ½) \cdot \lambda}{d} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Anordnungen, die zu Interferenzen führen



Spiegelversuch von Fresnel

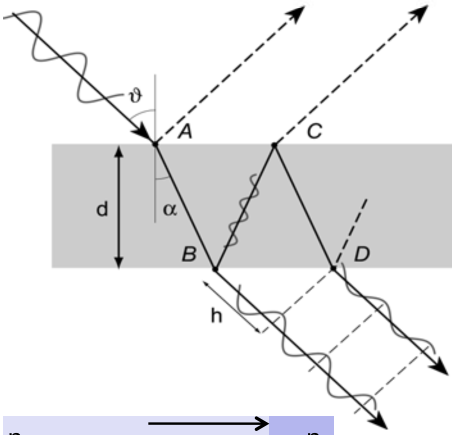


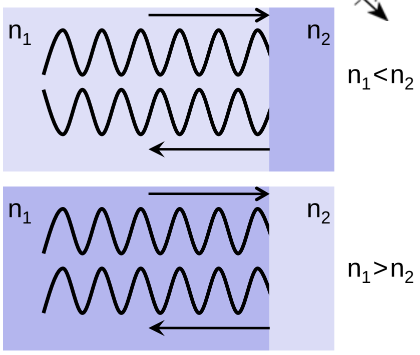
Das Licht einer punktförmigen Lichtquelle L wird mit Hilfe eines **Winkelspiegels** so reflektiert, dass die Wellen aus den **virtuellen Bildern** $\mathbf{L'_1}$ und $\mathbf{L'_2}$ herzukommen scheinen.

Die beiden virtuellen Bilder senden **kohärente Wellen** aus, die im Überlappungsgebiet zu **Interferenzerscheinungen** führen.

Fresnel hat für L eine schmale Spaltblende mit einer Lichtquelle dahinter verwendet. Auf dem Schirm hat er dann das schematisch skizzierte Interferenzmuster beobachtet.

Interferenz an planparallelen Schichten





Ein ausgewählter Lichtstrahl falle auf eine Platte mit dem **Brechungsindex n**.

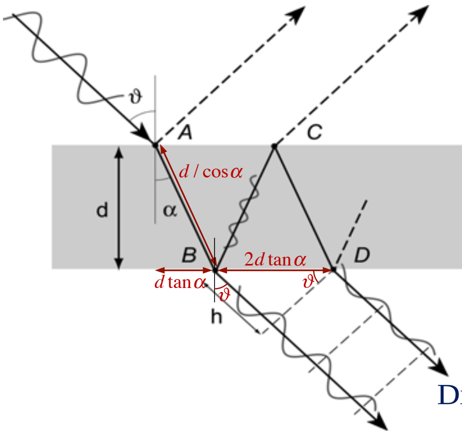
Der Strahl wird in den **Punkten A, B, C, D, usw.** je **reflektiert** und **gebrochen**.

Je mehr Punkte durchlaufen werden, desto kleiner wird die Amplitude.

Wie die unten an der Platte austretenden Parallelstrahlen interferieren, hängt vom **Gangunterschied** der beiden interferierenden Lichtwellen ab.

Bei der Bestimmung des Gangunterschieds muss beachtet werden, dass bei der **Reflexion am optisch dichteren Medium (bei A) ein Phasensprung von π erfolgt**, bei **Reflexion am optisch dünneren Medium aber nicht** und, dass die **Wellenlänge wegen $c' = c/n$ im Medium kürzer** ist.

Interferenz an planparallelen Schichten



Nach Snellius mit $n_1 \approx 1$ und $n_2 = n$ gilt:

$$\sin\vartheta = n \cdot \sin\alpha$$

weiter gilt für die Wellenlänge λ' im optischen Medium:

$$\lambda' = \lambda / n$$

und für die Wellenzahl k' im optischen Medium gilt:

$$k' = \frac{\omega}{c'} = \frac{2\pi}{\lambda'} = n \cdot k$$

Die Wellen y_B und y_D, die bei B und D aus der Platte treten:

$$y_B = a \cdot \sin\left(k(x+h) - \omega t\right) \qquad y_D = b \cdot \sin\left(kx - \omega t + \varphi'\right)$$

a und b sind die jeweiligen Amplituden der Wellen y_B und y_D

Für die Phasendifferenz zwischen den beiden Wellen y_B und y_D gilt:

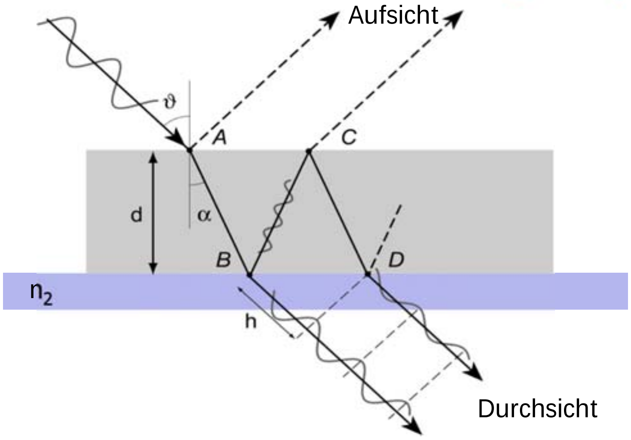
$$\Delta\varphi = \left[k(x+h) - \omega t\right] - \left[kx - \omega t + \varphi'\right]$$

$$= k \cdot h - \underbrace{\varphi'}_{k'(\overline{BC}+\overline{CD})} = k \cdot \underbrace{\left(\underbrace{2 \cdot d \cdot \tan\alpha}_{\overline{BD}} \cdot \sin\vartheta\right)}_{h} - \underbrace{nk}_{k'} \cdot \frac{2 \cdot d}{\underbrace{\cos\alpha}_{2\overline{BC}}}$$

und schliesslich, mittels Snellius und durch Umformen:

$$\Delta\varphi = k \cdot 2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta}$$

Interferenz an planparallelen Schichten



Für den Gangunterschied Δ gilt nun:

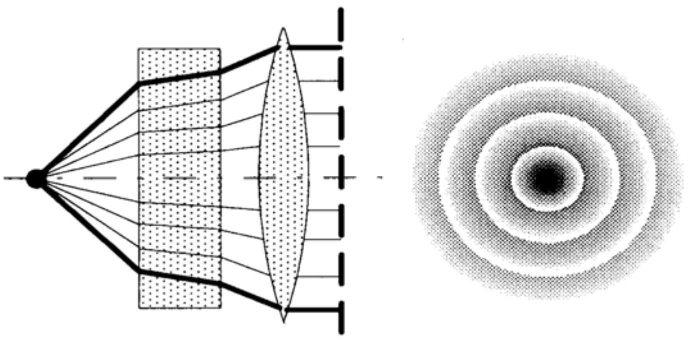
$$\Delta = \frac{\Delta\varphi}{k} = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}$$

	Durchsicht	Aufsicht	Aufsicht (n_2)
konstruktiv:	$\Delta = m \cdot \lambda$	$\Delta = (m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$	$\Delta = m \cdot \lambda$
destruktiv:	$\Delta = (m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$	$\Delta = m \cdot \lambda$	$\Delta = (m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$
m=0,1,2,3,...			

Bei der Aufsicht ist der Phasensprung bei A zu berücksichtigen.

Falls die Platte auf einem zweiten, optisch noch dichteren Medium ($n_2 > n_1 > 1$) liegt, müssen die Phasensprünge bei A und bei B einberechnet werden (sie heben sich auf).

Interferenz an planparallelen Schichten

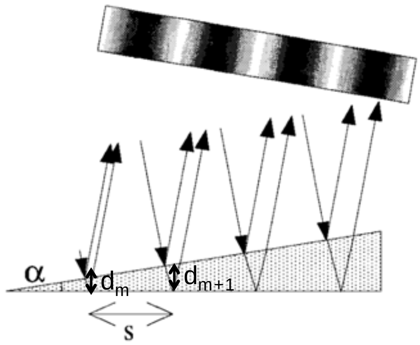


Treffen von einer **punktförmigen Lichtquelle** divergente Strahlen auf die Platte und erzeugen hinter der Platte **Interferenzlinien gleicher Neigung**, sind diese wegen der Symmetrie **kreisförmig** und werden als ***Haidinger'sche Ringe*** bezeichnet

Interferenz an Keil

Fallen parallele Lichtstrahlen, auf einen **Keil mit Brechungsindex n**, beobachtet man mit zunehmendem Abstand von der Keilkante helle und dunkle Streifen, sogenannte **Fizeau-Streifen**.

Obwohl der an der Oberseite des Keiles reflektierte Strahl und derjenige an der Unterseite leicht divergent sind, können sie durch eine Linse, und somit auch durch das Auge vereint werden.



Für senkrechten Lichteinfall (ϑ=0° zum Lot) und aus dem Gangunterschied für eine ebene Platte folgt:

$$\Delta = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} \overset{\vartheta=0^\circ}{=} 2dn = m\lambda$$

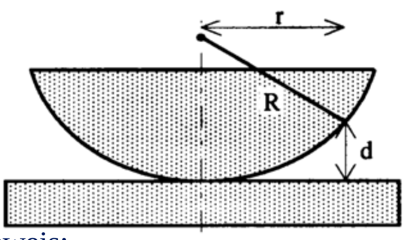
bei festem Einfallswinkel ϑ und fester Wellenlänge λ ist dies offensichtlich immer dann erfüllt, wenn für die Dicke d der Glasplatte $d = m\frac{\lambda}{2n}$ gilt und somit für zwei aufeinanderfolgende Maxima (oder Minima) $\Delta d = d_{m+1} - d_m = \frac{\lambda}{2n}$

Bei einem Keilwinkel α gilt $\tan\alpha = \Delta d / s$ und somit folgen Maxima (oder Minima) im Abstand: $s = \frac{\lambda}{2 \cdot n \cdot \tan\alpha}$

Newton´sche Ringe

Streifen gleicher Dicke sind auch die so genannten **Newton'schen Ringe**, die an flachen Luftkeilen entstehen (Ringe bei Dias hinter Glas!).

Da der Keilwinkel bei diesem Luftkeil nicht konstant ist, nimmt der Abstand der Ringe nach aussen ab.



Zwischen Kugel und ebener Platte erhält man als Interferenzminima Kreise mit den Radien:

$$r_{min} = \sqrt{m \cdot R \cdot \lambda}$$

und Interferenzmaxima Kreise mit Radien:

$$r_{max} = \sqrt{(m + ½) \cdot R \cdot \lambda}$$

Beweis:

$$r^2 + (R-d)^2 = R^2 \qquad \rightarrow (R-d)^2 = R^2 - r^2$$

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \approx R - R\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) = R - R + \frac{r^2}{2R}$$

$$= \frac{r^2}{2R} = m\frac{\lambda}{2\underbrace{n}_{\approx 1 \text{ für Luft}}} \quad \Rightarrow r^2 = mR\lambda$$

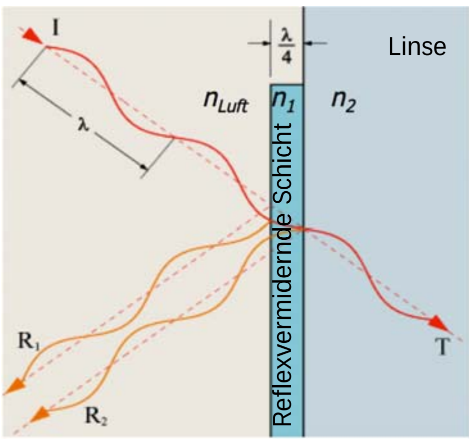
(gilt für Minima, da zusätzlicher Phasensprung!)

Farben dünner Plättchen

Seifenlamellen, **Ölfilme usw.** zeigen oft **Interferenzfarben**, die zustande kommen, wenn je nach Dicke, Brechungsindex und Einfallswinkel einzelne Farben verstärkt, andere aber ausgelöscht werden.

Reflexvermindernde Schichten

Interferenzen an dünnen Schichten können aber auch benutzt werden, um **Reflexe an Glasoberflächen zu vermindern** → Vergütung von Linsen, durch aufbringen einer dünnen Schicht.



Für senkrechten Lichteinfall auf die reflexvermindernde Schicht der Dicke d folgt aus $\Delta = (m + \frac{1}{2})\lambda_{\text{Luft}} = 2d\sqrt{n_1^2 - \sin^2\vartheta} \overset{\vartheta=0°}{=} 2dn_1$ mit der Bedingung destruktiver Interferenz bei Aufsicht $n_{Luft} = 1 < n_1 < n_2$ (wobei n_1 der Brechungsindex der Schicht und n_2 der Brechungsindex der Linse ist), dass die geometrische Dicke $d = d_{\text{geom}} = \frac{\lambda_{\text{Luft}}}{4n_1}$ sein muss.

Für die Wellenlänge λ_{Schicht} im Medium n_1 gilt: $\lambda_{\text{Schicht}} = \frac{\lambda_{\text{Luft}}}{n_1}$

und somit gilt für die geometrische Dicke $d_{\text{geom}} = \frac{\lambda_{\text{Schicht}}}{4}$; entsprechend kann eine optische Schichtdicke $d_{\text{optisch}} = \frac{\lambda_{Luft}}{4}$ definiert werden.

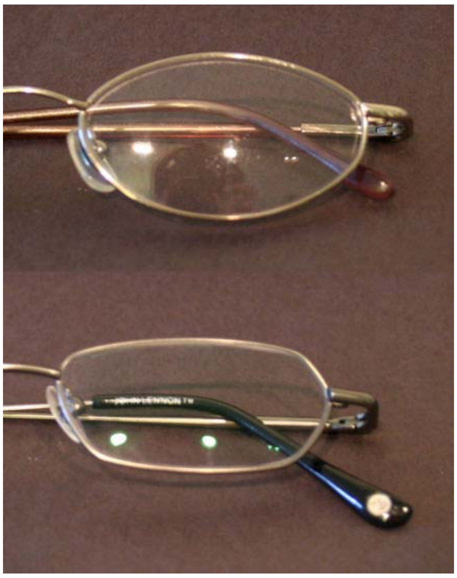
Man spricht daher von einer λ/4-Schicht, die bei der Vergütung von Gläsern und Linsen aufgetragen werden muss.

Für **nicht senkrechten Einfall** der Lichtwelle wird die Reflexverminderung schlechter, da diese Lichtwellen nicht mehr die ideale Länge in der Schicht durchlaufen.

In der Praxis werden **mehrere Schichten** unterschiedlicher Dicke und Brechungsindizes aufgetragen, um Reflexe eines möglichst breiten Spektrums von Wellenlängen zu vermindern.

Anti-Reflexbeschichtung

Beispiele:



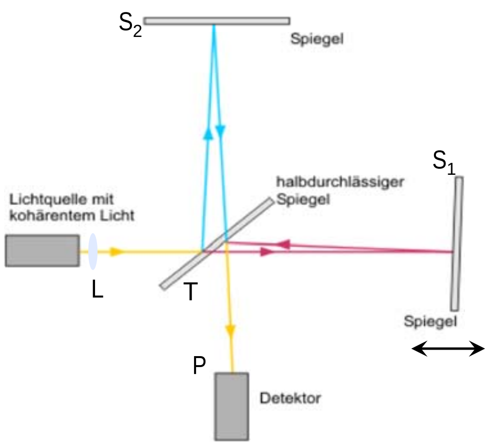
Oben – ohne Vergütung
Unten – Vergütung mittels $\lambda/4$ Schicht

Michelson-Interferometer

Interferometer sind optische Geräte, bei denen mit Hilfe von Lichtinterferenzen physikalische Grössen wie Längen, Brechzahl, Winkel, Wellenlängen, usw. gemessen werden.

Der Grundtyp ist jener von Michelson:

- Eine Quelle sendet einen **kohärenten Lichtstrahl** durch eine Linse L auf einen teilverspiegelten Strahlteiler T.
- Die Linse erzeugt ein Beugungsmuster.
- Die beiden Teilstrahlen werden von den Spiegeln S_1 und S_2 reflektiert und gelangen via T auf den Projektionsschirm P. Dort interferieren die Teilstrahlen.
- S_1 kann mit einer Mikrometerschraube verschoben werden, so dass ein Gangunterschied zwischen den Strahlen, und somit ein Interferenzmuster auf P erzeugt wird.
- Bei jeder Verschiebung von S_1 um $\lambda/2$ erfolgt ein Interferenzdurchgang



Michelson-Morley-Experiment

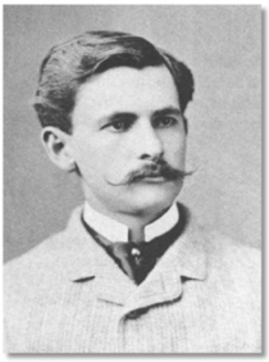
1881 arbeitete Michelson an einem Experiment, das als Michelson-Morley-Experiment in die Geschichte der Physik eingegangen ist.

Dabei sollte die Bewegung der Erde relativ zum Äther ermittelt werden, einem hypothetischen Medium, das man als Träger von Lichtwellen annahm.

Wider Erwarten ließ sich aber auf diese Weise eine Bewegung der Erde nicht feststellen.

Dieses Experiment gilt als einer der Grundpfeiler der **Relativitätstheorie**.

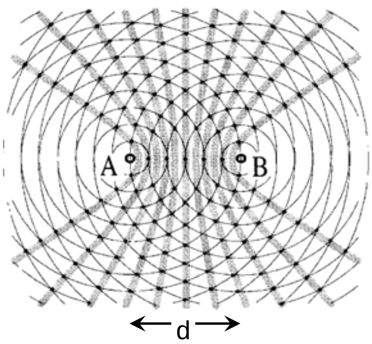
→ mehr dazu später...



Albert Abraham Michelson
* 19. Dezember 1852 in Strzelno (Polen)
† 9. Mai 1931 in Pasadena (Kalifornien)

1907 Nobelpreis in Physik
„für seine optischen Präzisionsinstrumente und die damit ausgeführten spektroskopischen und metrologischen Untersuchungen“

Interferenz und Intensität



Als Beispiel soll das **Interferenzmuster** in einer Ebene betrachtet werden, wie es durch **zwei Punktquellen A** und **B** erzeugt wird.

Das Licht, das beide aussenden, sei **kohärent**.

Wenn man Quelle B verschliesst, **hängt die Feldstärke nur vom Abstand von der Punktquelle ab**.

Öffnet man zusätzlich die Quelle B, welche **die gleiche Leistung** abgeben soll, dann kommt es zu **Interferenzmustern**.

An den **dunkelsten** Stellen **löschen sich die Wellen vollständig aus,**
an den **hellsten addieren sich die Amplituden.**

An den hellsten Stellen beträgt die Energiedichte: $w(\vec{r}) = \varepsilon_0 \cdot (\, \vec{E}_{0,A}(\vec{r}) + \vec{E}_{0,B}(\vec{r})\,)^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)$

Die **Energiedichte** ist also an **den hellsten Stellen viermal grösser,** als bei Beleuchtung durch nur eine Quelle.

Über den Raum gemittelt, erhalten wir erwartungsgemäss eine Addition der beiden Intensitäten, was aber hier nicht bewiesen werden soll.

Addition von nicht-kohärenten Lichtwellen

Bei **nicht-kohärenten Lichtquellen** werden im zeitlichen Mittel immer die **Intensitäten einzelner Teillichtwellen addiert**.

Dies ist selbst in einer Spektrallampe für zwei Wellen, die von zwei verschiedenen Atomen ausgesandt werden, gültig.

Infolge der **Emissionszeit** von nur rund **10^{-8} s** erfährt die **Frequenz** und damit auch die **gegenseitige Phasenbeziehung** **eine Unschärfe**.
Der ganze Wellenzug kann nicht genauer als auf **eine Wellenlänge** bestimmt werden.

Damit ist der Phasenwinkel entsprechend unscharf . Das heisst, dass jeder Phasenwinkel zwischen den beiden Wellen zwischen 0 und 2π zeitlich gleich häufig vorkommt.

Dementsprechend treten keine Interferenzerscheinungen auf.

Beugung

Prinzip von Huygens

Beugung beschreibt die Ausbreitung von Licht unter Berücksichtigung des Wellencharakters. Um sie rechnerisch zu erfassen, benützt man das ***Prinzip von Huygens*** und jenes der **linearen Superposition von Wellenamplituden**.

„Eine Welle breitet sich so aus, dass jeder Punkt den sie erreicht selbst zum Zentrum einer Kugelwelle wird. Die Überlagerung all dieser Wellen liefert das Gesamtbild der Welle zu späteren Zeiten."

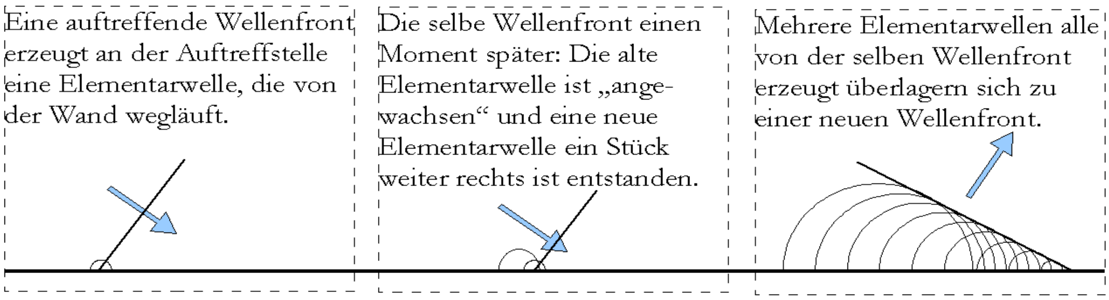
Christiaan Huygens
* 14. April 1629 in Den Haag, Niederlande
† 8. Juli 1695 ebenda

Mit Huygens Prinzip kann das **Reflexionsgesetz** und **Brechungsgesetz** neu bewiesen werden.

Das **Fermat´sche Prinzip** der geometrischen Optik ist demnach nicht nötig – es ist aber trotzdem praktisch, und da nützlich wo die Näherungen der geometrischen Optik gültig sind.

Reflexion und Brechung im Wellenbild

Reflexion



Der blaue Pfeil zeigt die **Strahlrichtung** eines geometrischen Lichtstrahls an.

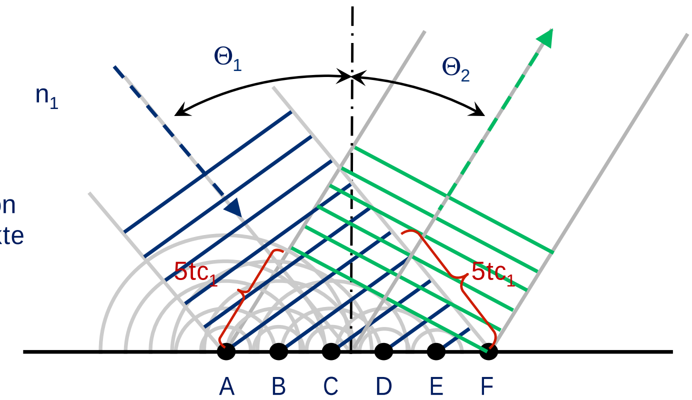
Diese steht immer **senkrecht** zu den **Wellenfronten**.

Reflexion und Brechung im Wellenbild

Reflexion

Während der Zeit t bewegt sich die Wellenfront um einen Punkt (A,B,C,..) weiter entlang der Reflexionsebene. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium ist dann gerade $c_1=c/n_1$.

Betrachtet werden 5 Zeiteinheiten.
Die Wellenfront bewegt sich in dieser Zeit von Punkt A zu F, und erzeugt in jedem der Punkte eine Kugelwelle, welche sich zu einer neuen Wellenfront im Medium überlagern.



Es gilt:

$$\sin\Theta_1 = \frac{5tc_1}{\overline{AF}} \qquad \sin\Theta_2 = \frac{5tc_1}{\overline{AF}}$$

und somit

$$\sin\Theta_1 = \sin\Theta_2$$

$$\Rightarrow \Theta_1 = \Theta_2$$

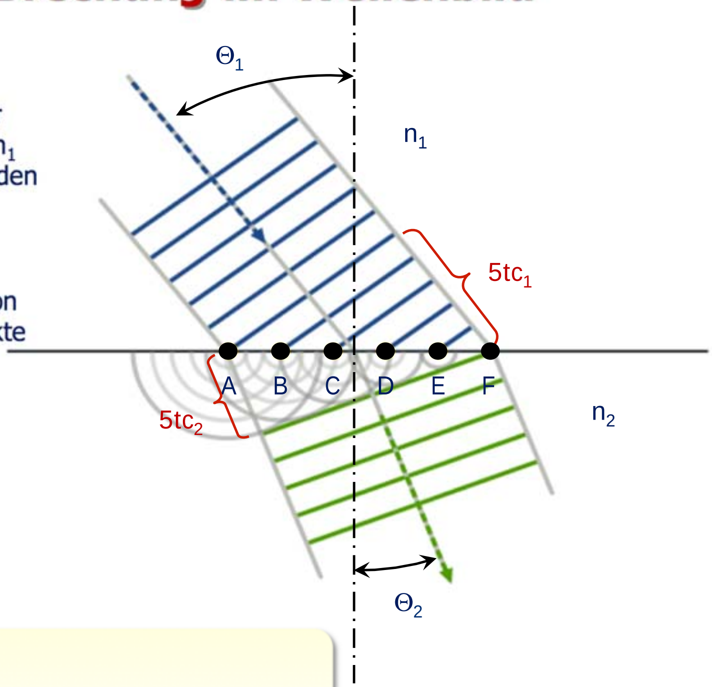
Das Reflexionsgesetz ist so im Wellenbild erklärt.

Reflexion und Brechung im Wellenbild

Brechung

Während der Zeit t bewegt sich die Wellenfront um einen Punkt (A,B,C,..) weiter entlang der Trennfläche der beiden Medien n_1 und n_2. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit in den beiden Medien ist dann gerade $c_i=c/n_i$.

Betrachtet werden 5 Zeiteinheiten.
Die Wellenfront bewegt sich in dieser Zeit von Punkt A zu F, und erzeugt in jedem der Punkte eine Kugelwelle, welche sich zu einer neuen Wellenfront im Medium 2 überlagern.



Es gilt:

$$\sin\Theta_1 = \frac{5tc_1}{AF} \qquad \sin\Theta_2 = \frac{5tc_2}{AF}$$

und somit

$$\frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Das Snellius´sche Brechungsgesetz ist so im Wellenbild erklärt.

Komplexe Darstellung von ebenen Wellen

Wir haben ebene Wellen als Sinusfunktionen folgender Form eingeführt:

$$y(x,t) = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

häufig ist jedoch die komplexe Schreibweise von Vorteil. Dazu verwenden wir die Euler'sche Identität:

Es gilt ganz allgemein:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$ mit i der komplexen Einheit: $i^2 = -1$

z.Bsp.

$$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2} = i$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \qquad e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2} = -i$$

Mit Hilfe der Euler'schen Identität lässt sich eine ebene Welle als Imaginärteil einer komplexwertigen Exponentialfunktion schreiben:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \mathrm{Im}\{y_0 \cdot e^{i(kx-\omega t+\varphi)}\} \\ &= \mathrm{Im}\{y_0 \cdot \cos(kx-\omega t+\varphi) + i \cdot y_0 \cdot \sin(kx-\omega t+\varphi)\} \\ &= y_0 \cdot \sin(kx-\omega t+\varphi) \end{aligned}$$

Im bezeichnet den Imaginärteil.

Intensität einer elektromagnetischen Welle

Aus der Elektrodynamik wissen wir, dass die Energiedichte im elektromagnetischen Feld gegeben ist durch:

$$w = w_{el.} + w_{mag.} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}^* + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}\cdot\vec{B}^*$$

Wobei $\vec{E}^*$ und $\vec{B}^*$ die komplex-konjugierten Felder bedeuten.
(Damit gilt diese Formel auch dann noch, wenn komplexe Schreibweise verwendet wird.)

Weiter kann aus den Maxwell´schen Gleichungen gezeigt werden, dass für eine elektro-magnetische Welle gilt:

$$\vec{E} \perp \vec{B} \quad und \quad \left|\vec{E}\right| = c\cdot\left|\vec{B}\right| \quad sowie \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Damit gilt für die Energiedichte:

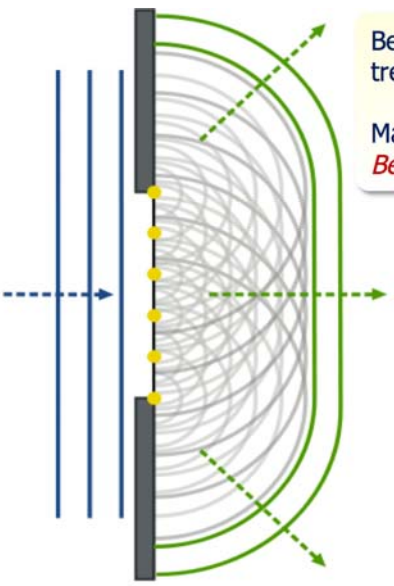
$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}\vec{E}^* + \frac{1}{2\mu_0 c^2}\vec{E}\vec{E}^* = \varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2$$

Die Intensität J ist die von einer Welle pro Zeit- und Flächeneinheit transportierte Energie:

$$J = wc = c\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2$$

Intensität und somit Helligkeit ist somit **proportional zum Betrags-Quadrat der elektrischen Feldstärke**

Beugung



Beugung ist die Ablenkung von Wellen wenn diese auf ein Hindernis treffen.

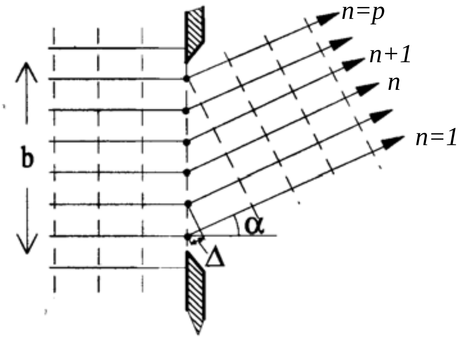
Man unterscheidet Beugungserscheinungen im **Nahfeld** (*Fresnel-Beugung*) und im **Fernfeld** (*Fraunhofer-Beugung*).

Joseph von Fraunhofer
* 6. März 1787 in Straubing
† 7. Juni 1826 in München

Die Fraunhofer-Beugung setzt voraus, dass **Wellenfronten eben** sind.

Wir beschränken uns im folgenden auf die Fraunhofer-Beugung.

Beugung am Spalt



Eine ebene Welle trifft auf einen **Spalt der Breite *b***. Um die Intensität der elektromagnetischen Welle nach dem Durchlauf durch den Spalt zu berechnen, verwenden wir das **Prinzip von Huygens**. Entsprechend addieren wir alle Kugelwellen kohärent auf, die ihre Zentren entlang des Spaltes haben.

Wir denken uns dabei den Spalt in ***p* gleiche Sektionen** unterteilt, wobei im **Abstand von *b/p*** jeweils ein Zentrum für eine **neue Kugelwelle** sei.

Später lassen wir ***p* gegen unendlich** gehen, so dass die **einzelnen Sektionen infinitesimal klein** werden.

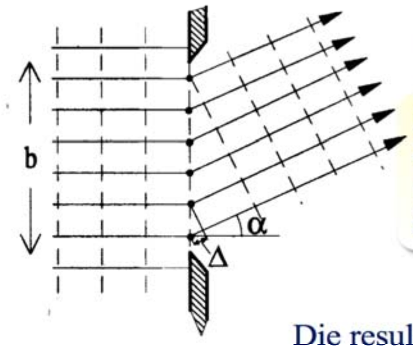
Wir rechnen komplex und setzen für die *n*-te Kugelwelle:

$$\vec{E}_n(x,t) = \mathrm{Im}\ \vec{E}_{n,0} \cdot e^{i(kx-\omega t+\varphi_n)}$$

Die *n*-te Kugelwelle wird so als ebene Welle beschrieben, was in der Fernfeldnäherung gültig ist.

Zwischen zwei benachbarten Wellen $(n,\ n+1)$ besteht die Phasendifferenz

$$\varphi = k \cdot \Delta \ = \underbrace{\frac{2\cdot\pi}{\lambda}}_{k} \cdot \underbrace{\frac{b \cdot \sin\alpha}{p}}_{\Delta}$$



Beugung am Spalt

Jede Teilwelle trägt einen Anteil von ~1/*p* zur resultierenden Feldstärke bei.
Die Phase φ_n der *n*-ten Teilwelle ist $n\varphi$ (*n*=0,1,2,...,p-1).
Alle Teilwellen müssen aufaddiert werden.

Die resultierende Feldstärke ist somit:

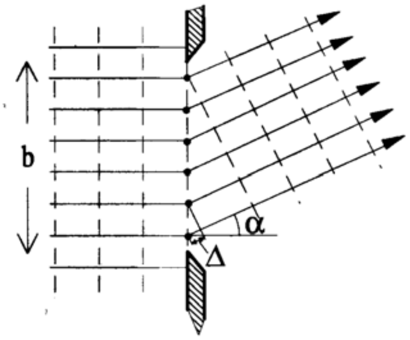
$$E = \frac{E_0}{p} \cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t)} + \frac{E_0}{p} \cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t+\varphi)} + \frac{E_0}{p} \cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t+2\cdot\varphi)} + \ldots + \frac{E_0}{p} \cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t+(p-1)\cdot\varphi)}$$

$$= \frac{E_0}{p} \cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t)} \cdot [\,1 + e^{i\cdot\varphi} + (e^{i\cdot\varphi})^2 + \ldots + (e^{i\cdot\varphi})^{p-1}\,]$$

Dies ist gerade eine geometrische Reihe

$$= \frac{E_0}{p} \cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t)} \cdot \frac{1-(e^{i\cdot\varphi})^p}{1-(e^{i\cdot\varphi})}$$

$$= \frac{E_0}{p} \cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t)} \cdot \frac{e^{i\cdot p\cdot\varphi/2}}{e^{i\cdot\varphi/2}} \cdot \frac{(e^{i\cdot p\cdot\varphi/2} - e^{-i\cdot p\cdot\varphi/2})}{(e^{i\cdot\varphi/2} - e^{-i\cdot\varphi/2})} = \frac{E_0}{p} \cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t)} \cdot e^{i\cdot(p-1)\cdot\varphi/2} \cdot \frac{\sin(p\cdot\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$$



Beugung am Spalt

Verwenden von

$$\varphi = k\Delta = \frac{2\cdot\pi}{\lambda}\cdot\frac{b\cdot\sin\alpha}{p}$$

und

$$E = \frac{E_0}{p}\cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t)}\cdot e^{i\cdot(p-1)\cdot\varphi/2}\cdot\frac{\sin(p\cdot\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$$

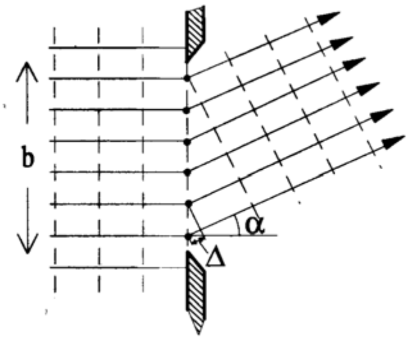
ergibt

$$E = \frac{E_0}{p}\cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t)}\cdot e^{i\cdot(p-1)\cdot\varphi/2}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\sin(\frac{1}{p}\cdot\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda})}$$

Die Intensität ist proportional zu E², wobei in der komplexen Schreibweise beachtet werden muss, dass E² als E·E* gerechnet wird (somit ist |E| als √ E·E* zu verstehen):

$$|E| = E_0\frac{1}{p}\cdot\left|\frac{\sin(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\sin(\frac{1}{p}\cdot\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda})}\right| \underset{p\to\infty}{\overset{\lim}{=}} E_0\left|\frac{\sin(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda}}\right|$$

wobei $\lim_{p\to\infty} p\cdot\sin\left(\frac{1}{p}\cdot x\right) = x$ verwendet wurde.



Beugung am Spalt

Für die Intensität $J(\alpha)$ gilt somit:

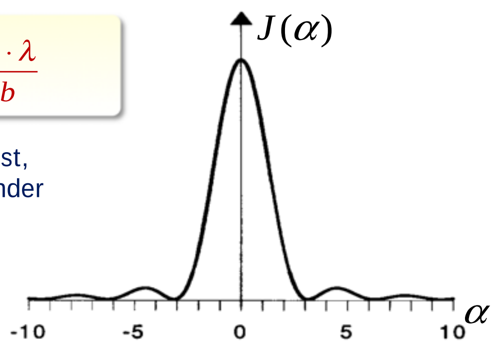
$$J(\alpha) = c\varepsilon_0|E|^2 = J_0\frac{\sin^2(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\left(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda}\right)^2}$$

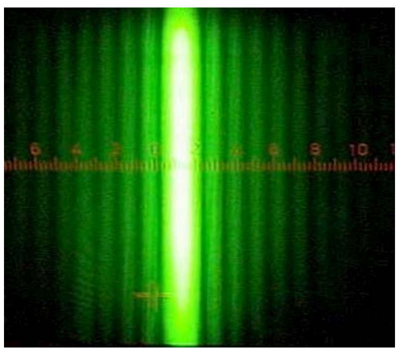
Die Intensität $J(\alpha)$ ist eine Funktion von $\frac{\pi b\sin\alpha}{\lambda}$ und hat Nullstellen (Dunkelheit) für:

$$\frac{\pi b\sin\alpha}{\lambda} = m\cdot\pi \qquad m = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

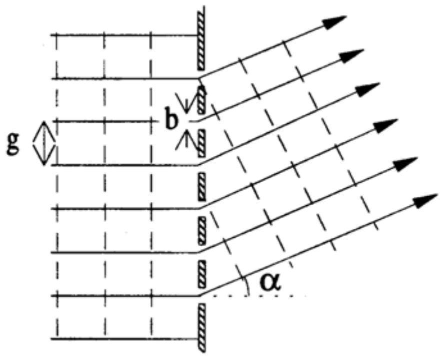
$$\sin\alpha_{\min} = \frac{m\cdot\lambda}{b}$$

Je enger der Spalt b ist, desto weiter auseinander liegen die Nullstellen.





Beugung am Gitter



Mehrere parallele Spalten in regelmässigem Abstand nebeneinander **bilden ein Gitter**.

Der **Abstand** g zwischen zwei Spalten ist die **Gitterkonstante** g.

Wir betrachten ein Gitter mit s **Spalten**.

In der *Fraunhofer Näherung* können wir zuerst s **Strahlen** miteinander **interferieren** lassen.

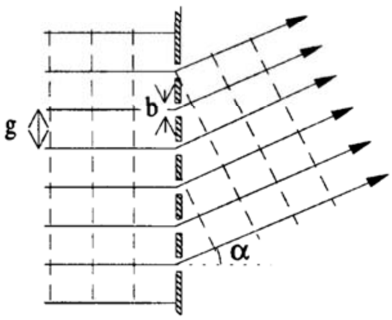
Danach wird noch das vorherige **Resultat für den Einzelspalt verwendet**.

Die Phasendifferenz zwischen Strahlen von benachbarten Spalten ist: $\varphi = k\Delta = \underbrace{\frac{2\cdot\pi}{\lambda}}_{k} \cdot \underbrace{g\cdot\sin\alpha}_{\Delta}$

Verwenden von s elektrischen Feldvektoren wie beim Einzelspalt gibt:

$$E = s\cdot\frac{E_s}{s}\cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t)}\cdot e^{i\cdot(s-1)\cdot\varphi/2}\cdot\frac{\sin(s\cdot\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} = E_s\cdot e^{i\cdot(kx-\omega\cdot t)}\cdot e^{i\cdot(s-1)\cdot\varphi/2}\,\frac{\sin(\frac{\pi\cdot s\cdot g\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\sin(\frac{\pi\cdot g\cdot\sin\alpha}{\lambda})}$$

wobei E_s der Anteil der elektrische Feldstärke ist, die auf einen Spalt trifft.



Beugung am Gitter

Für die Feldstärke des Einzelspalts E_s verwenden wir

$$|E_s| = E_0\cdot\left|\frac{\sin(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda}}\right|$$

so dass resultiert:

$$|E| = E_0\cdot\underbrace{\left|\frac{\sin(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda}}\right|}_{E_s}\cdot\left|\frac{\sin(\frac{\pi\cdot s\cdot g\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\sin(\frac{\pi\cdot g\cdot\sin\alpha}{\lambda})}\right|$$

Da die Intensität proportional zum Amplitudenquadrat ist, gilt:

$$J(\alpha) = J_0\cdot\frac{\sin^2(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\left(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda}\right)^2}\cdot\frac{\sin^2(\frac{\pi\cdot s\cdot g\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\sin^2(\frac{\pi\cdot g\cdot\sin\alpha}{\lambda})}$$

Dies ist das Produkt einer langsamen und einer schnellen Funktion von $\sin\alpha$,

da $b \ll s\cdot g$

Hauptmaxima treten auf wenn der **Nenner verschwindet** (auch der Zähler geht dann gegen Null)!

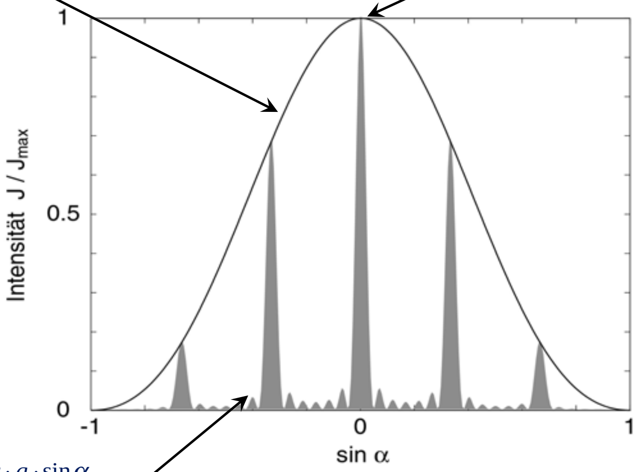
Beugung am Gitter

$$\frac{\sin^2(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\left(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda}\right)^2}$$

Hüllkurve

$$\lim_{\frac{\pi\cdot g\cdot\sin\alpha}{\lambda}\to\pm m\pi}\frac{\sin^2(\frac{\pi\cdot s\cdot g\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\sin^2(\frac{\pi\cdot g\cdot\sin\alpha}{\lambda})}=s^2$$

Hauptmaximum



Der Limes kann am besten mit der Regel von de L´Hôpital gerechnet werden:

Falls

$$f(x_0)=g(x_0)=0$$

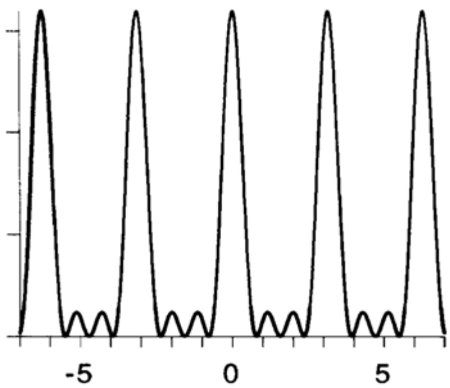
dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$J_0\cdot\frac{\sin^2(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\left(\frac{\pi b\cdot\sin\alpha}{\lambda}\right)^2}\cdot\frac{\sin^2(\frac{\pi\cdot s\cdot g\cdot\sin\alpha}{\lambda})}{\sin^2(\frac{\pi\cdot g\cdot\sin\alpha}{\lambda})}$$

Intensitätskurve

Beugung am Gitter



Bei Maxima unterscheidet man Hauptmaxima, dazwischen liegen Nebenmaxima.

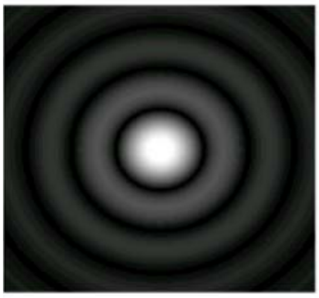
Für die Hauptmaxima gilt:

$$\frac{\pi\cdot g\cdot\sin\alpha_{max}}{\lambda}=\pm m\cdot\pi \quad\rightarrow\quad \sin\alpha_{max}=\pm\frac{m\cdot\lambda}{g} \qquad m=0,1,2,\ldots$$

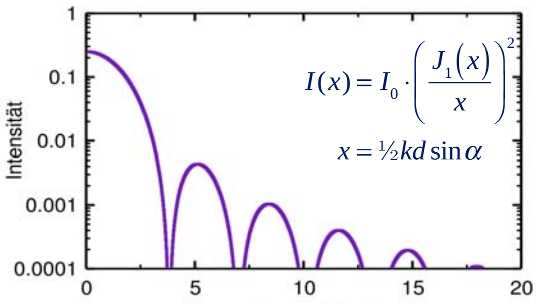
Bei diesen Beugungswinkeln beträgt der Gangunterschied von zwei benachbarten Wellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ. Je grösser die Wellenlänge, desto weiter liegen die Maxima auseinander.

Beugung an Lochblende

Betrachtet man anstelle eines Spaltes ein **kreisrundes Loch**, dann bleiben die prinzipiellen Überlegungen gleich, die mathematische Auswertung ist aber aufwändiger und führt auf **Besselfunktionen**.



Besselfunktionen: $J_n(x) = \left(\tfrac{1}{2}x\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\tfrac{1}{4}x^2\right)^k}{k!\,(n+k)!} \qquad n \in \mathbb{N}$



$$\sin\alpha_{1,\min} \approx \frac{3.83}{\tfrac{1}{2}kd} = \frac{3.83\cdot\lambda}{\pi d} = 1.22\cdot\frac{\lambda}{d}$$

Der Winkel, unter dem der erste dunkle Ring auftritt, beträgt:

$$\sin\alpha_{1,\min} \approx 1.22\cdot\frac{\lambda}{d}$$

wobei d der **Durchmesser** der Lochblende ist. Weitere Minima findet man bei

$$\sin\alpha_{2,\min} \approx 2.232\cdot\frac{\lambda}{d}, \qquad \sin\alpha_{3,\min} \approx 3.238\cdot\frac{\lambda}{d}, \ \ldots$$

Auflösungsvermögen

Optische Instrumente, wie **Fernrohr** und **Mikroskop**, aber auch **das menschliche Auge** haben infolge von Beugungserscheinungen ein **begrenztes Auflösungsvermögen**.

Eine **punktförmige Lichtquelle** (z.B. Fixstern beim Fernrohr) erzeugt ein **Beugungsscheibchen**.

Die Frage, wann zwei Beugungsscheibchen eindeutig als zwei Punkte erkannt werden, ist etwas subjektiv.

Allgemein wird das Kriterium verwendet, dass dies dann der Fall ist, wenn das **Beugungs-Maximum nullter Ordnung** des einen Objekts auf das **Beugungs-Minimum erster Ordnung** des andern fällt.

Damit folgt, dass zwei Punkte, die **durch eine Öffnung des Durchmessers *d* abgebildet** werden und **unter dem Winkel δ erscheinen**, nur dann aufgelöst werden, wenn gilt:

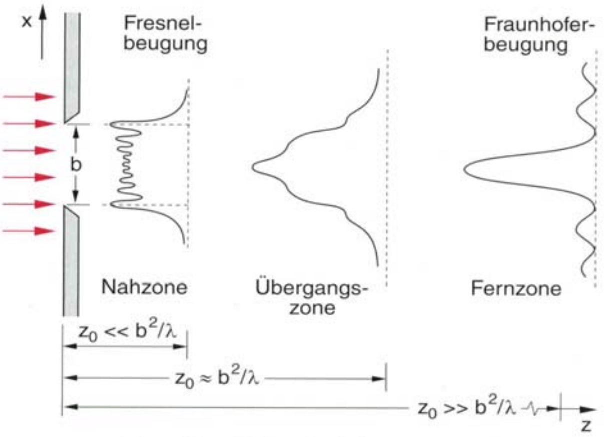
$$\sin\delta \gtrsim 1.22\cdot\frac{\lambda}{d}$$

Je grösser der **Objektivdurchmesser *d*** umso besser das Auflösungsvermögen.

Fresnel-Beugung

In den Berechnungen zum Spalt und Gitter haben wir angenommen, dass die interferierenden Lichtstrahlen hinter dem Hindernis parallel sind (*Fraunhofer-Beugung*).

Dies gilt nur näherungsweise bei grosser Entfernung.



Fresnel- und Fraunhoferbeugung an einem Spalt. Gezeigt sind von links nach rechts die Intensitätsverteilungen in der Nahzone, in einer mittleren Entfernung und in sehr großer Entfernung, wo man die bekannte Fraunhoferbeugung erhält

Untersucht man die Interferenzen nahe beim beugenden Objekt, so müssen die Phasen-unterschiede aufgrund der unterschiedlichen Strahlenrichtungen berücksichtigt werden.

Dies ist die *Fresnel-Beugung*, deren Berechnung recht kompliziert ist.

Eine Konsequenz ist, dass das Hauptmaximum, das bei der *Fraunhofer-Beugung* in der Symmetrieachse beobachtet wird, nicht mehr auftritt.

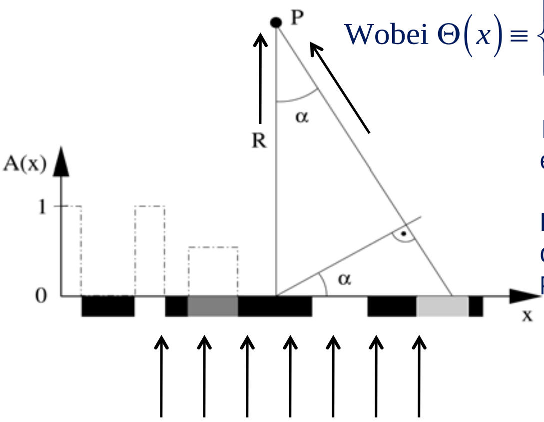
Beugung als Fouriertransformation

Die Intensitätsverteilung, die beim Durchgang von Licht durch eine Struktur (z. B. ein Loch, ein Gitter, etc.) entsteht, ist proportional zur **Fouriertransformierten** der beugenden Struktur (Fraunhofer Beugung).

Zur **vereinfachten Illustration** dieser Korrespondenz zwischen abstrakter mathematischer Operation und Realität nehmen wir ein **eindimensionales Gitter** mit ortsabhängigem **Transmissions-koeffizienten A(x)** an, dessen Wert zwischen 0 und 1 liegt.

Ein Spalt der Breite a würde beispielsweise durch $A(x) = \Theta(x) - \Theta(x-a)$ dargestellt.

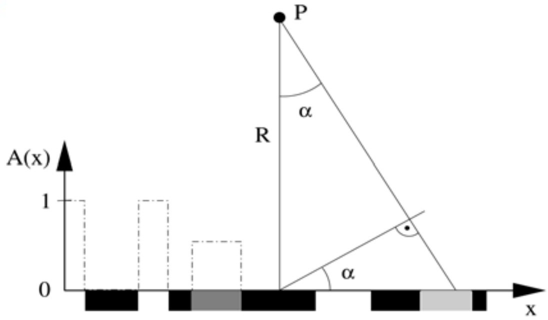
Wobei $\Theta(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ die Heaviside Funktion ist.



Im Punkt P treffen Wellen von den verschiedenen Orten x ein und interferieren zu einer resultierenden Amplitude.

Die einlaufenden Wellen haben einen Gangunterschied, der durch die unterschiedliche Entfernung vom Ort x zum Punkt P stammt.

Beugung als Fouriertransformation



Eine ebene, monochromatische Welle falle auf ein Gitter. Die Amplitude im Punkt P $\widetilde{A}(P)$ setzt sich zusammen aus Wellen, die von allen Orten x im Punkt P einlaufen, und ist gegeben durch:

$$\widetilde{A}(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot(R + x\cdot\sin\alpha))}\cdot A(x)\cdot dx$$

wobei $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl ist. Der Punkt P sei weit entfernt relativ zu den charakteristischen Längen der beugenden Struktur, so dass $\alpha \approx \sin\alpha$, und die Fraunhofer'sche Näherung α = konstant angenommen werden darf. Damit ist der Punkt P durch den Winkel α charakterisiert. Bei fester Wellenlänge demnach auch durch $k\alpha$. Somit ergibt

$$\widetilde{A}(k\cdot\alpha) = e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot R)}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)\cdot e^{-i\cdot(k\cdot\alpha)\cdot x}\cdot dx$$

Fouriertransformation

Mathematische Definition der Fouriertransformierten $\widetilde{f}(\omega)$ einer Funktion f(t):

$$\widetilde{f}(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\cdot dt$$

und der entsprechenden Fourier-Rücktransformation

$$f(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(\omega)\cdot e^{+i\cdot\omega\cdot t}\cdot d\omega$$

die Amplitude des Beugungsmusters, $\widetilde{A}(k\cdot\alpha)$, ist also proportional zur Fouriertransformierten der beugenden Struktur, die durch $A(x)$ beschrieben wird

$$\widetilde{A}(k\cdot\alpha) = e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot R)}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)\cdot e^{-i\cdot(k\cdot\alpha)\cdot x}\cdot dx$$

wir können demnach durch Fourier-Rücktransformation aus der Amplitude des Beugungsmusters die beugende Struktur berechnen

$$A(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{A}(k\cdot\alpha)\cdot e^{+i\cdot(k\cdot\alpha)\cdot x}\cdot d(k\cdot\alpha)$$

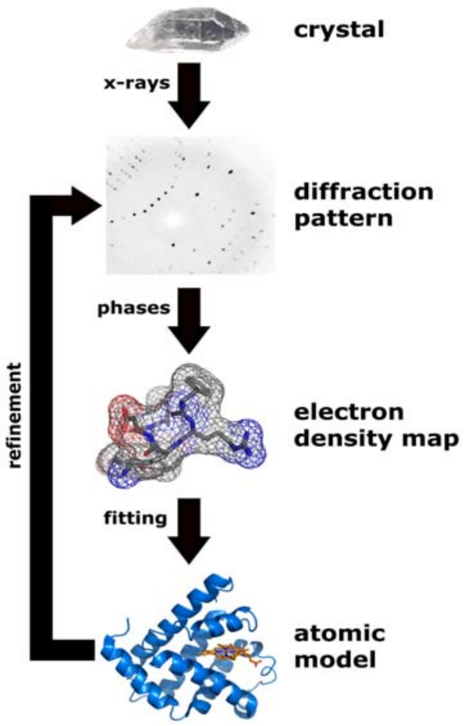
Beugung als Fouriertransformation

Analoge Überlegungen zur Strukturfunktion $A(x)$ und zum Beugungsmuster $\widetilde{A}(k \cdot \alpha)$ als dessen Fouriertransformierte kann man auch in 2 und 3 Dimensionen durchführen.

Dieser Zusammenhang ist Grundlage der Strukturbestimmung mit Hilfe von Röntgenstreuung.

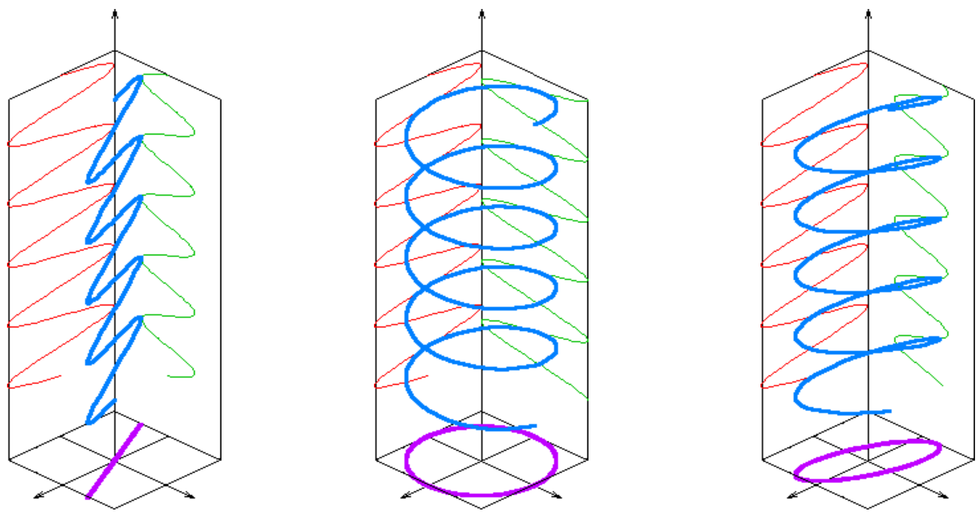
In der Praxis ist jedoch $\widetilde{A}(k \cdot \alpha)$ weder für alle k, noch für alle α bekannt.

Deshalb kann die Struktur $A(x)$ nur näherungsweise bestimmt werden.



Wellenoptik

Polarisation



linear polarisierte Welle

zirkular polarisierte Welle

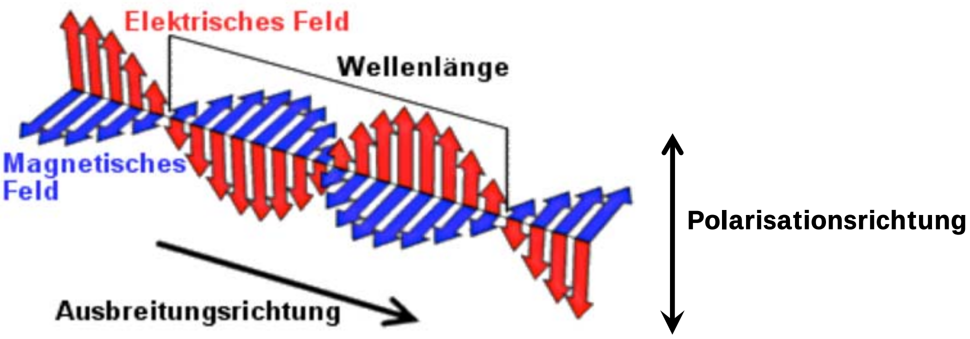
elliptisch polarisierte Welle

Linear Polarisierte Wellen

Eine ebene Welle mit

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \cdot \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t + \varphi)$$

ist linear polarisiert. Der **elektrische Feldvektor schwingt immer in der selben Ebene.**



Für elektromagnetische Wellen nimmt man die Richtung des elektrischen Feldvektors als Polarisationsrichtung

Überlagerung Linear Polarisierter Wellen

Überlagern sich zwei linear polarisierte kohärente Wellen, die in Phase sind, aber verschiedene Polarisationsrichtungen haben, resultiert wieder eine linear polarisierte Welle, mit

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Überlagern sich zwei kohärente Wellen, eine in y-Richtung, die andere in z-Richtung polarisiert und mit einem Phasenwinkel von $\pi/2$, so folgt

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,t) &= \vec{E}_{y,0}\cdot\sin(k\cdot x - \omega\cdot t) + \vec{E}_{z,0}\cdot\sin(k\cdot x - \omega\cdot t + \frac{\pi}{2})\\ &= \vec{E}_{y,0}\cdot\sin(k\cdot x - \omega\cdot t) + \vec{E}_{z,0}\cdot\cos(k\cdot x - \omega\cdot t)\end{aligned}$$

ist zusätzlich $E_0 = |E_{y,0}| = |E_{z,0}|$ dann gilt:

$$\vec{E}(x,t) = E_0\cdot\left(\vec{e}_y\cdot\sin(k\cdot x - \omega\cdot t) + \vec{e}_z\cdot\cos(k\cdot x - \omega\cdot t)\right)$$

Zirkulare Polarisation

Falls $E_0=|E_{y,0}|=|E_{z,0}|$ gilt, ist der Betrag des elektrischen Feldvektors konstant

$$\left|\vec{E}(x,t)\right| = E_0 \cdot \left|\sin(k\cdot x-\omega\cdot t)\vec{e}_y + \cos(k\cdot x-\omega\cdot t)\vec{e}_z\right|$$

$$= E_0 \cdot \sqrt{\left(\sin(k\cdot x-\omega\cdot t)\vec{e}_y + \cos(k\cdot x-\omega\cdot t)\vec{e}_z\right)^2}$$

$$= E_0 \cdot \sqrt{\sin^2(k\cdot x-\omega\cdot t)\underbrace{\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y}_{1} + 2\sin(k\cdot x-\omega\cdot t)\cos(k\cdot x-\omega\cdot t)\underbrace{\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z}_{0} + \cos^2(k\cdot x-\omega\cdot t)\underbrace{\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z}_{1}}$$

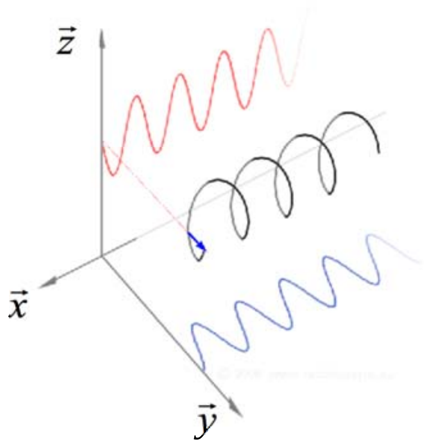
$$= E_0 \cdot \sqrt{\underbrace{\sin^2(k\cdot x-\omega\cdot t)+\cos^2(k\cdot x-\omega\cdot t)}_{1}}$$

$$= E_0$$

Falls $E_0=|E_{y,0}|=|E_{z,0}|$ gilt, entsteht eine **zirkular polarisierte Welle**.

Eine zirkular polarisierte Welle kann **links-** wie auch **rechts- zirkular polarisiert** sein.

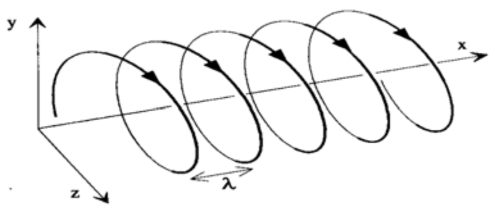
Je nachdem, ob sich der elektrische Feldvektor links oder rechts dreht.



Elliptische Polarisation

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_{y,0}\cdot\sin(k\cdot x-\omega\cdot t) + \vec{E}_{z,0}\cdot\cos(k\cdot x-\omega\cdot t)$$

Im allgemeinen Fall sind $|E_{y,0}|\neq|E_{z,0}|$ verschieden. Dann entsteht elliptisch polarisiertes Licht.



Unpolarisiertes Licht

Bei unpolarisiertem Licht haben verschiedene Wellenzüge unterschiedliche Polarisationsrichtungen. Im Mittel ist keine Polarisationsrichtung ausgezeichnet.

Dies ist zBsp bei Sonnenlicht, Glühbirnen, etc. der Fall.

Dies gilt allgemein für thermische Lichtquellen → **Schwarzkörper Strahlung.**

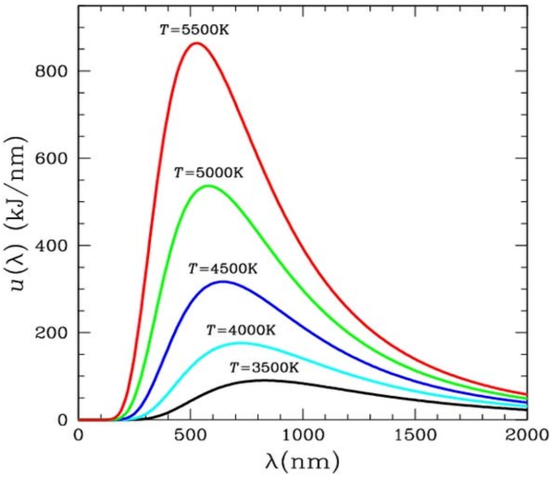
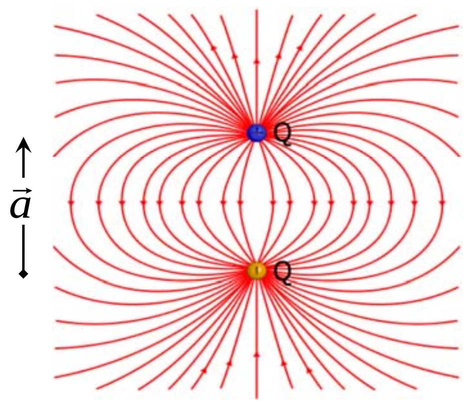


Bild:
Intensität der abgegebenen schwarzkörper Strahlung in Abhängigkeit von der Wellenlänge.

Je höher die Temperatur, desto weiter verlagert sich das Maximum zu kleineren Wellenlängen.

$T_{Glühbirne} \approx 2500K$
$T_{Sonnenoberfläche} \approx 5800K$

Hertz'scher Dipol



Hertz'sche Dipole senden Wellen mit einer gegebenen **Polarisationsrichtung** aus.

Ohne Wechselwirkung mit Materie und ohne Interferenz mit anderen Wellen, bleibt diese Polarisationsrichtung erhalten.

elektrisches Dipolmoment

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{a}$$

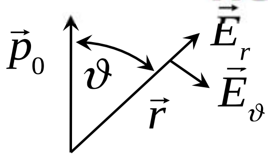
Hertz´scher Dipol

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t$$

Atome können bei spontaner Emission **als Hertz´sche Dipole angenähert** werden. Da diese unabhängig von einander sind, treten alle möglichen Polarisationswinkel senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gleich häufig auf, d.h. es ist keine Polarisationsrichtung ausgezeichnet. Dies ist gerade der Fall bei einer thermischen Lichtquelle.

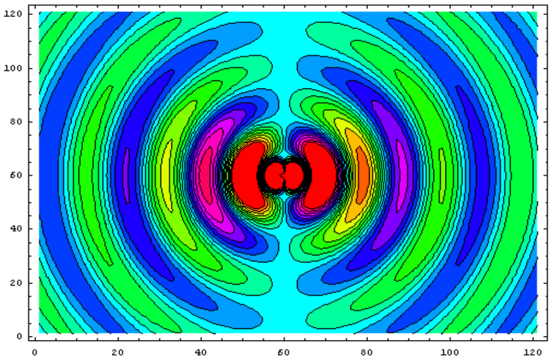
Laserlicht dagegen ist im Allgemeinen aufgrund polarisierender optischer Bauteile im Resonator (schräge Umlenkspiegel und Flächen → Brewsterwinkel) meistens linear polarisiert.

Hertz´scher Dipol



$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t$

$$\vec{E}_\vartheta \approx \frac{p_0 \omega^2 \mu_0 \sin\vartheta \cos(\omega t - \omega r / c)}{4\pi r}; \quad \vec{E}_r \approx 0 \quad \left(\text{Fernfeld-näherung}\right)$$



Elektrisches Feld eines oszillierenden elektrischen Dipols.

ist linear polarisiert; $\vec{E}$ und $\vec{p}_0$ liegen in der selben Ebene.

Die abgestrahlte Leistung P ist definiert durch

den Poynting Vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

mit $|\vec{B}| = \frac{1}{c} |\vec{E}|$ *und* $P = \oint_{4\pi} \vec{S} \cdot d\vec{f}$

$P = \frac{p_0^2 \cdot \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$ proportional zur vierten Potenz von ω

Wellenlänge: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}$

Die Abstrahlung $P(\vartheta)$ ist **maximal senkrecht zur Oszillationsrichtung des Dipols**, und **verschwindet in Richtung des Dipols**: $P(\vartheta) \sim \sin^2\vartheta$.
Die **abgestrahlte Leistung** P eines Herz´schen Dipols ist proportional zur **vierten Potenz** der **Kreisfrequenz** ω.

Erzeugung von linear polarisiertem Licht

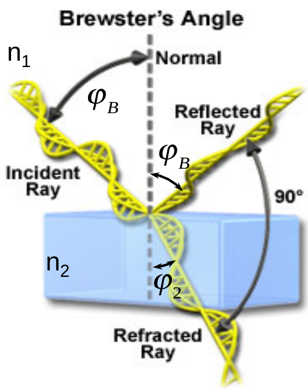
Polarisation durch Reflexion

Licht, das von einem **Dielektrikum** reflektiert wird, ist **teilweise polarisiert**.

Steht der **reflektierte Strahl** senkrecht auf dem gebrochenen Strahl, dann ist das reflektierte Licht vollständig **linear polarisiert**.

Der **Einfallswinkel**, bei dem vollständige Polarisation der reflektierten Welle auftritt, ist φ_B (**Brewsterwinkel**).

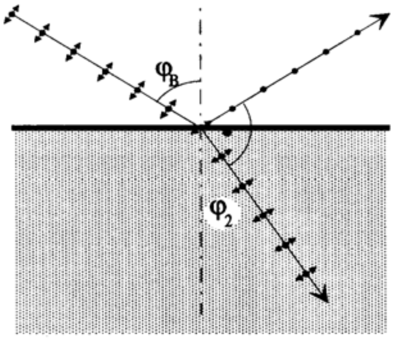
Sir **David Brewster**
* 11. Dezember 1781 bei Jedburgh, Schottland,
† 10. Februar 1868 in Allerly bei Melrose



$$\varphi_2 + \varphi_B + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\varphi_2 = 90^\circ - \varphi_B \xrightarrow{\text{Snellius}} \frac{\sin\varphi_B}{\sin(90^\circ - \varphi_B)} = \tan\varphi_B = \frac{n_2}{n_1}$$

Polarisation durch Reflexion



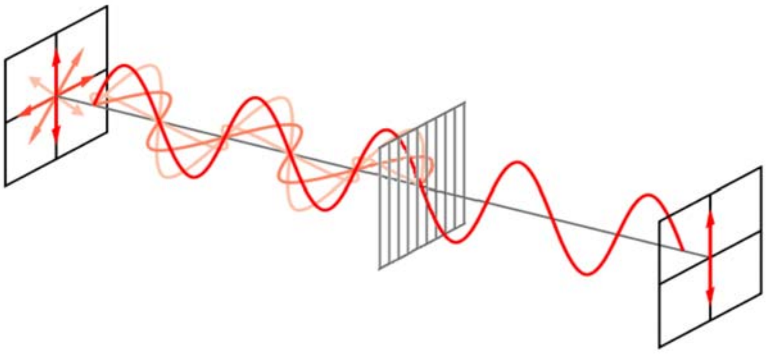
Der Effekt kann qualitativ erklärt werden:

Der einfallende Strahl bringt **Elektronen der Moleküle des Dielektrikums in Schwingung,** diese wirken als **Hertz´sche Dipole**. Die **Dipole** sind so die Zentren von Huygens'schen Elementarwellen.

Falls wir uns die Schwingungsrichtung in eine solche senkrecht zur Zeichenebene (•) und eine in der Zeichenebene (↔), (und natürlich senkrecht zur Ausbreitungsrichtung!) vorstellen, können **an der Oberfläche gerade nur Hertz'sche Dipole, die senkrecht zur Zeichenebene liegen, schwingen**, und si elektromagnetische Wellen (Licht) in Richtung des reflektierten Strahls aussenden.

Dielektrikum	Brechungsindex n	Brewsterwinkel
Wasser	1.333	53°
Glas	1.515	57°
Diamant	2.417	67.5°

Polarisationsfilter



In **dichroitischen Kristallen** hängt die Absorption von der Polarisationsrichtung relativ zur optischen Achse ab → siehe Doppelbrechung.

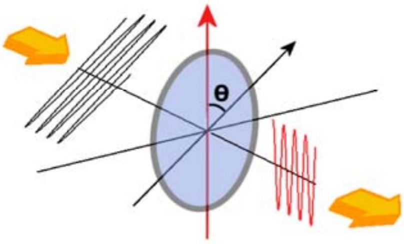
Durch einfaches Drehen dieser Kristalle lässt sich erreichen, dass nur die **gewünschte Polarisationsrichtung** durchgelassen wird.

In der Praxis verwendet man anstelle von dichroitischen Kristallen meist **Folien aus Zellulosehydrat**, die durch Streckung in eine Richtung dichroitisch gemacht werden können (Polarisationsfilter).

Polarisationsfilter

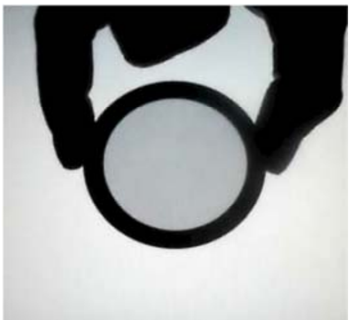
Étienne Louis Malus * 23. Juni 1775 in Paris; † 23. Februar 1812 Paris

Die Intensität eines polarisierten Lichtstrahls ist nach durchlaufen eines Polarisationsfilters



$I = I_0 \cos^2\theta$ Gesetz von Malus

Dies kann einfach verstanden werden: Die Amplitude des elektrischen Feldvektors wird nach Durchlaufen des Polarisationsfilters noch $E = E_0 \cos\theta$ betragen. Intensität ist aber proportional zum Quadrat des elektrischen Feldvektors.

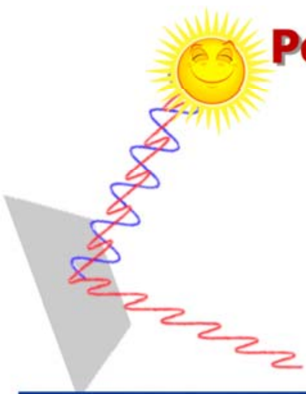


Tritt unpolarisiertes Licht auf ein Polarisationsfilter, wird gerade die Hälfte der Intensität durchgelassen.

$I = \tfrac{1}{2} \cdot I_0$

Dies wird klar, wenn man weiss, dass der mittlere Wert von $\langle \cos^2\theta \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}$ beträgt.

Polarisation durch Reflexion



Fotographie einer Person hinter einer reflektierenden Glasscheibe.

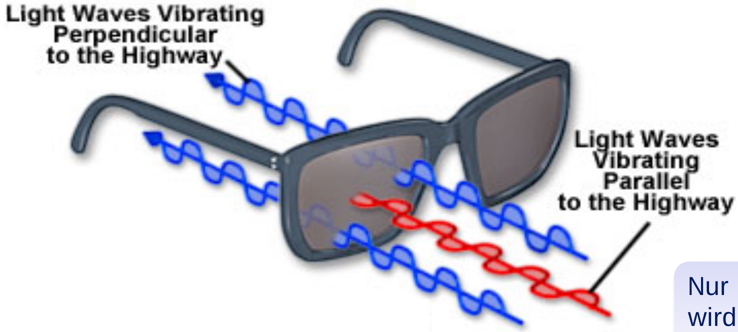
Links ohne und rechts mit Polarisationsfilter.

Unpolarisiertes Licht, das an einer ebenen Fläche (Glas, See, Eis, Schnee, Strasse – Asphalt, etc.) reflektiert, ist **teilpolarisiert**, und zwar in Richtung **parallel zur reflektierenden Fläche**.

Da die meisten **ebenen Flächen horizontal** verlaufen, ist auch die Teilpolarisierung des reflektierten Lichts in horizontaler Richtung.

Ein **Polarisationsfilter**, welches nur **vertikal polarisiertes Licht** durchlässt, kann somit reflektiertes Licht absorbieren. Übrig bleibt der **vertikal polarisierte Anteil** von **nicht-reflektierten Lichtstrahlen**.

Polarisationsfolien

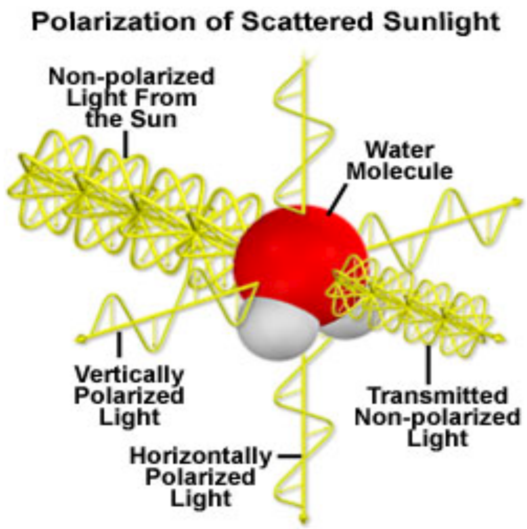


Nur die vertikale Komponente des Lichts wird bei Polaroidbrillen durchgelassen. Dadurch wird verhindert, dass störende Reflexionen das Auge erreichen.

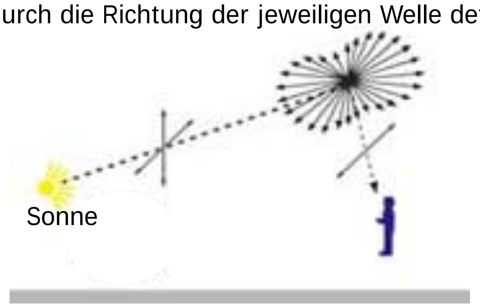
Moderne **Polarisationsfolien** bestehen aus Folien von **langkettigen Kohlenwasserstoff-molekülen**. Diese werden durch Dehnung ausgerichtet.

Durch **Tränken in jodhaltigen Lösungen** werden die Molekülketten bei optischen Frequenzen leitend und **absorbieren das in Richtung der Kettenmoleküle polarisierte Licht**.

Polarisation von Tageslicht

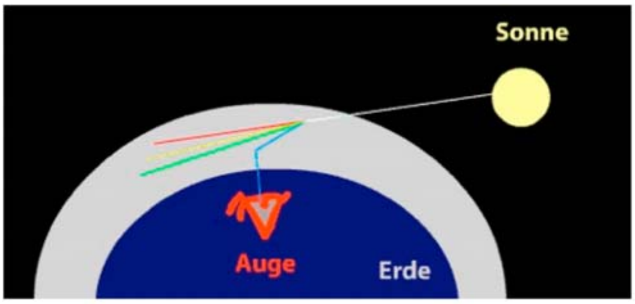


Moleküle der Atmosphäre werden durch das E-Feld einer elektromagnetischen Welle (Licht) in Schwingungen versetzt. Die Schwingungsebene ist durch die Richtung der jeweiligen Welle definiert.



Sonnenlicht streut in der Atmosphäre an N_2, O_2, H_2O, etc. Molekülen.
Diese werden als **Hertz´sche Dipole** aufgefasst, welche durch den elektrischen Feldvektor des Sonnenlichts eine **erzwungene Schwingung** mit der Frequenz der einlaufenden Lichtwelle vollführen. Entsprechend strahlen diese Hertz´schen Oszillatoren wiederum Lichtwellen der selben Frequenz aus, diese sind zudem entlang der Schwingungsrichtung dieser Oszillatoren polarisiert.
Direktes Sonnenlicht hingegen ist nicht polarisiert.

Warum ist der Himmel Blau?



Das Blau des Himmels entsteht durch Streuung von weissem Licht an N_2, O_2, H_2O, etc.

Absorption von Licht und die Abstrahlung eines Hertz´schen Dipols sind stark Frequenz-abhängig.

Blaues Licht wird mit grösserer Wahrscheinlichkeit absorbiert und wieder abgestrahlt als z.Bsp. rotes Licht. Blau wird stärker gestreut als Rot.

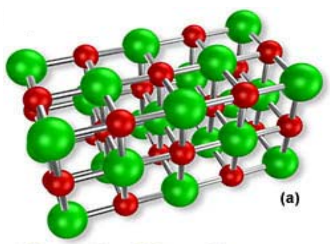
Allgemein gilt für einen Hertz´schen Dipol, dass Absorption und Abstrahlungsleistung sich proportional zur 4ten Potenz der Frequenz verhalten:

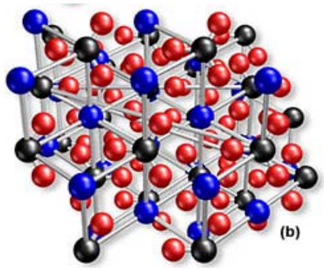
$$I(\omega) \sim \omega^4 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{I_{blau}}{I_{rot}} = \frac{\omega^4_{blau}}{\omega^4_{rot}} = \frac{\left(2\pi \frac{c}{\lambda_{blau}}\right)^4}{\left(2\pi \frac{c}{\lambda_{rot}}\right)^4} = \frac{\lambda^4_{rot}}{\lambda^4_{blau}} = \left(\frac{650\,\text{nm}}{450\,\text{nm}}\right)^4 = 4.4$$

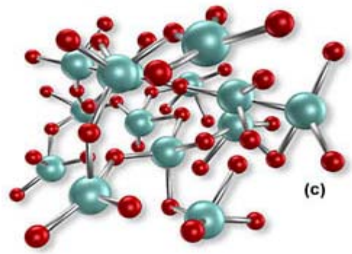
Blau wird viel stärker gestreut als rot. Daher kommt vermehrt blaues Licht auf der Erde an und der Himmel erscheint blau.
Am **Morgen** und am **Abend** muss das Licht einen längeren Weg durch die Atmosphäre durchlaufen. Dadurch wird **Blau fast vollständig absorbiert**. Es kommt **nur noch der Rotanteil** auf der Erde an.

Polarisation durch Doppelbrechung

Viele durchsichtige Medien zBsp. Glas, Salz-Kristalle, Polymere, organische und anorganische Stoffe, etc. sind **optisch isotrop**, d.h. es gibt keine richtungsabhängige optische Phänomene.
Andere Medien können Richtungsabhängigkeiten Aufweisen – diese sind **optisch anisotrop**.







NaCl – Kochsalz
kubisches Gitter

Natrium- und Chlor-Ionen befinden sich in der x-, y-, und z-Achse in gleichen Abständen.

Isotrope kristalline Struktur.

Ca[CO$_3$] – Kalkspat
(auch Kalzit oder Calcit)

Anisotrope kristalline Struktur

Polymer – verkettete Monomere (Verkettung identischer Molekülketten)

Polymere können eine kristallähnliche Struktur aufweisen. Sie können optisch **opak** oder **transparent** sein. Manche sind optisch **isotrop**, andere sind optisch **anisotrop**.

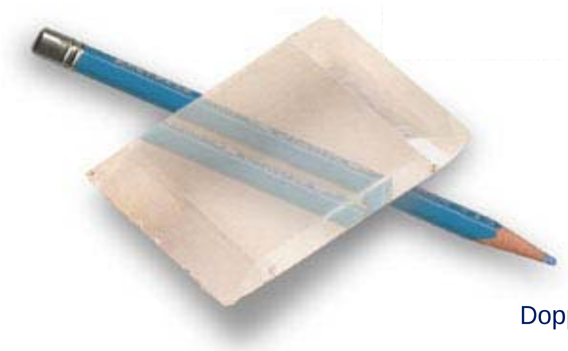
Doppelbrechung

In **doppelbrechenden Kristallen** ist die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** von der **Ausbreitungsrichtung** bezüglich der **Kristallachse** und von der **Polarisation** abhängig.

Beim Eintritt des Strahls in den Kristall ist nach Huygens jeder Punkt Quelle einer Elementarwelle.

In einem **isotropen Material** sind die **Wellenfronten Kugelflächen**.

In einem **anisotropen Material** ist die **Ausbreitungsgeschwindigkeit der Elementarwellen richtungsabhängig**, die **Wellenfronten** sind Ellipsen (bzw. **Rotationsellipsoidflächen**)



Doppelbrechung von Kalkspat

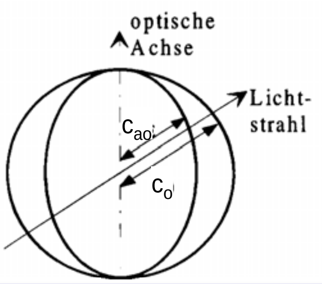
Doppelbrechung

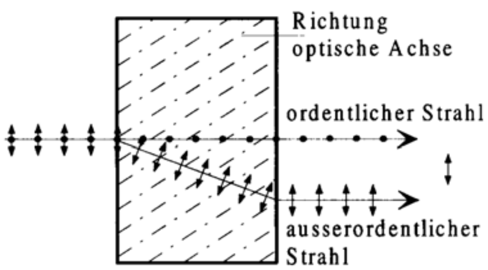
Im Material spaltet sich der Lichtstrahl in **zwei Strahlen** auf.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des ***ordentlichen Strahls*** ist **unabhängig von der Strahlrichtung**, das heisst für ihn sind Wellenfronten nach wie vor Kugelflächen.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des ***ausserordentlichen Strahls*** ist jedoch **richtungsabhängig,** so dass die Wellenfronten Rotationsellipsoide werden.

In Richtung der **optischen Achse** haben der ordentliche und der ausserordentliche Strahl die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit → $\mathbf{c_0 = c_{ao}}$.

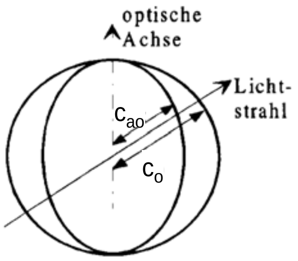


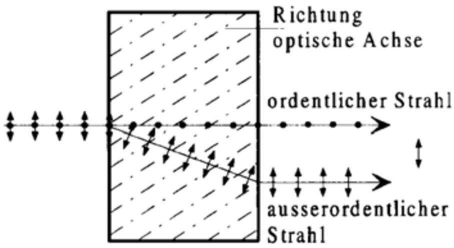


Der **ordentliche und der ausserordentliche Strahl** sind beide **linear polarisier**t. Der E-Feld Vektor des **ordentlichen Strahls** schwingt senkrecht zur Ebene, die durch den Strahl und der optischer Achse aufgespannt ist; der E-Feld Vektor des **ausserordentlichen** Strahls schwingt **in dieser Ebene**.

Doppelbrechung

Der **ausserordentliche Strahl wird auch bei senkrechtem Einfall „gebrochen“,** falls die optische Achse des Kristalls nicht mit der Grenzfläche übereinstimmt (Strahl nicht in Richtung optische Achse und nicht senkrecht dazu).





Bei der graphischen Konstruktion der resultierenden Wellenflächen im doppelbrechenden Material nach dem Huygens'schen Prinzip muss berücksichtigt werden, dass die Elementarwellen nicht Kugelwellen sind, sondern die Form von Rotationsellipsoiden haben.

Man unterscheidet zwei Fälle:
bei ***optisch negativen Kristallen*** ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit senkrecht zur optischen Achse am grössten: $\mathbf{c_o < c_{ao}}$,
für ***optisch positive Kristalle*** ist sie am kleinsten: $\mathbf{c_o > c_{ao}}$.

Damit erhält man eine **von der Wellenlänge λ abhängige zeitliche Verschiebung des ordentlichen zum ausserordentlichen Strahl** → Farbspektrum von Dünnschliffen.

Pleochroismus

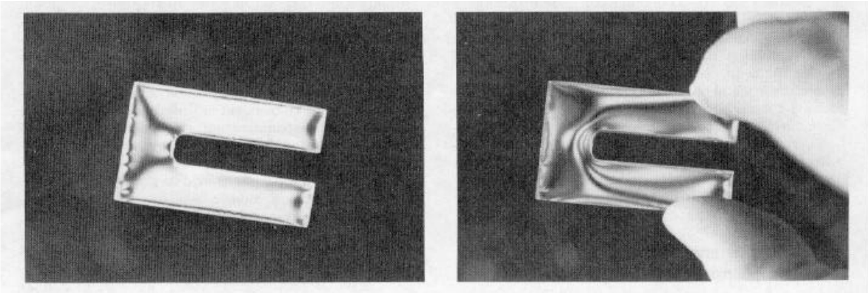
Einige **doppelbrechende Kristalle**, wie beispielsweise der **grüne Turmalin**, absorbieren den **ordentlichen** und **ausserordentlichen** Strahl **bei verschiedenen Wellenlängen verschieden stark**.
Eine 1 mm dicke Platte **absorbiert den ordentlichen Strahl** und **lässt den ausserordentlichen** leicht geschwächt **durch**.

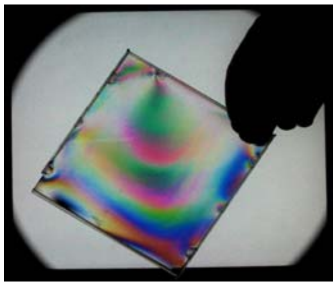
geschliffener grüner Turmalin

verschiedene Turmalin-Minerale

Viele Kristalle verändern ihre Farbe, wenn man sie von verschiedenen Seiten her betrachtet oder beleuchtet → Pleochroismus. Beobachtet man nur eine Farbänderung, also zwei Farben, so spricht man von Dichroismus. Betrachtet man einen Rubin von verschiedenen Seiten, so beobachtet man Farbänderungen von Rot nach Gelborange. Turmaline wechseln ihre Farben von Grün nach Blau (und umgekehrt).
Pleochroismus tritt bei durchsichtigen, farbigen Steinen ebenso auf wie bei undurchsichtigen. Die Ursache dafür ist die ungleiche Absorption des Lichtes abhängig von der Ausbreitungsrichtung und der Polarisationsrichtung

Spannungsdoppelbrechung





Gläser und Kunststoffe können unter Spannung doppelbrechend werden.

Bei einem **auf Zug beanspruchten** Stab vergrössern sich die Atomabstände in Zugrichtung, wobei sich der Brechungsindex etwas vermindert.

Quer zur Zugrichtung wird der Atomabstand durch die Querkontraktion etwas vermindert, was den Brechungsindex leicht erhöht.

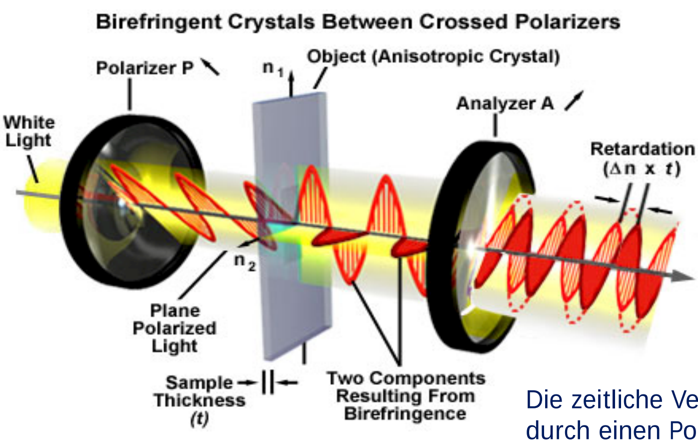
Stellt man unter Spannung stehende Modelle zwischen **gekreuzte Polarisationsfilter**, werden sie aufgehellt, da das **Licht elliptisch polarisiert** wird.

Farbige Linien, so genannte **Isochromaten**, kennzeichnen Orte mit gleicher Hauptspannungsdifferenz.

Herstellen von zirkular polarisiertem Licht

Bei **planparallelen Plättchen**, bei denen die **optische Achse parallel zur Plattenebene** liegt, haben beide Strahlen die gleiche Richtung, aber der eine wird gegenüber dem andern verzögert.

Mit so genannten **λ/4-Plättchen** kann aus linear polarisiertem, zirkular polarisiertes Licht gewonnen werden.



Ist die Dicke des doppelbrechenden Kristalls **gerade λ/4**, d.h. die **zeitliche Verzögerung** des ordentlichen zum ausserordentlichen Strahl macht gerade eine **Viertel-Wellenlänge** aus, dann überlagern sich die beiden linear polarisierten Wellen des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahls so, dass gerade eine **zirkular-polarisierte** Welle entsteht.

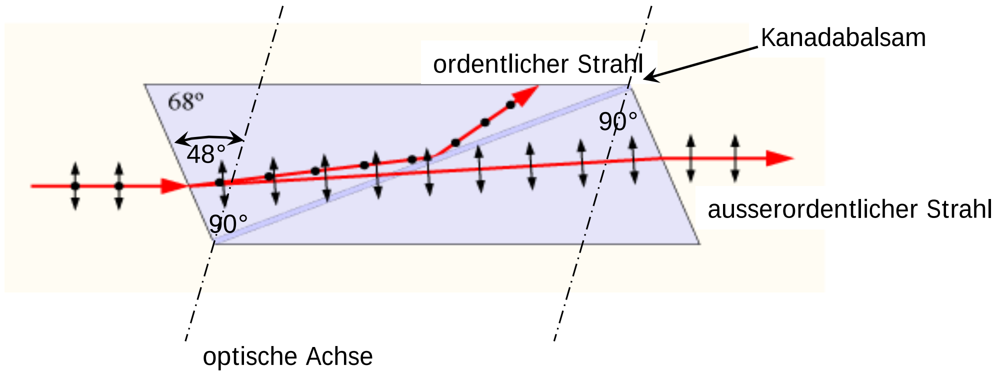
Die zeitliche Verschiebung kann, wie hier gezeigt, auch durch einen Polarisationsfilter sichtbar gemacht werden.

Nicol'sches Prisma

WILLIAM NICOL 1768-1851, Schottischer Physiker

Mit dem ***Nicol'schen Prisma*** kann **linear polarisiertes Licht** gewonnen werden.

Ein **Kalkspatprisma** wird diagonal gespalten und mit **Kanadabalsam** wieder zusammengekittet.
Der ordentliche Strahl wird am Kanadabalsam **total reflektiert**, der ausserordentliche, senkrecht zur Zeichenebene polarisierte Strahl, kann sich ungehindert ausbreiten.



Für die Brechungsindizes des ausserordentlichen Strahls, des Kanadablasams und des ordentlichen Strahls muss folgende Beziehung gelten:

$$n_{ao} < n_K < n_o$$

Kanadabalsam

Kanadabalsam ist das transparent austrocknende **Baumharz** der kanadischen Balsamtanne, ein Terpentin, welches ausgehärtet **optischem Glas sehr ähnliche Brechungseigenschaften** besitzt.

Das bedeutet, die Grenzstelle zwischen Balsam und Glas wird nach dem Aushärten so gut wie unsichtbar.

Deshalb wird es zBsp zum **Verkitten von Linsen** zu Linsengliedern benutzt, zur **Konservierung von Mikroskop-Präparaten** oder zum möglichst unsichtbaren **Reparieren von Kratzern in Glasscheiben**, früher oft auch in Brillen.

Als Edelterpentin, mit dem Venetianer Terpentin ähnlichen Eigenschaften, ist es in der Ölmalerei bei der Herstellung von Malfarben von Bedeutung.

Balsamtanne

Optisch aktive Substanzen

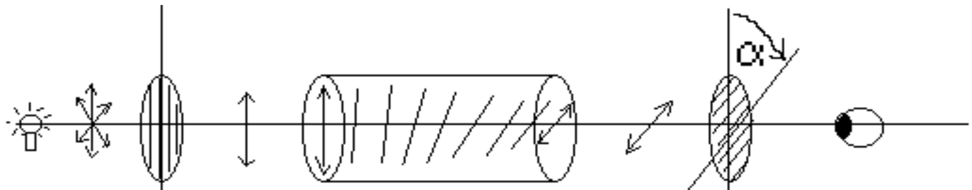
Es gibt Kristalle, welche die **Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht drehen** können.

Die **Drehung** der Polarisationsebene (linear polarisiertes Licht bleibt linear polarisiert!) ist **proportional zur durchstrahlten Strecke**.

Auch Lösungen von Rohrzucker, Traubenzucker, Weinsäure und Buttersäure sind optisch aktiv.

Es gibt **rechts drehende**, wie auch **links drehende** Moleküle.

Die optische Aktivität kommt durch **asymmetrisch aufgebaute Moleküle** zustande. Der Drehwinkel bei wässrigen Lösungen bei gegebener Durchstrahlungsstrecke ist **proportional zur Konzentration** der Lösung.



Optisch aktive Substanzen

Eine linear polarisierte Welle kann als **Überlagerung einer rechts-** und einer **linkspolarisierten Welle** verstanden werden.

In optisch aktiven Substanzen sind die **Phasengeschwindigkeiten u_L** und **u_R** verschieden.

Für den Drehwinkel gilt:

$$\delta = \omega \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{1}{u_L} - \frac{1}{u_R} \right) \equiv \delta_0 \cdot d \cdot k$$

wobei d die durchstrahlte Strecke, und k die Konzentration der optisch aktivenSubstanz in Wasser ist.

δ_0 ist stark abhängig von der Wellenlänge $\left(\textit{Rotationsdispersion}\right)$.

Spezifische Drehung δ_0 (20°C, $\lambda = 589.3$ nm) in Grad pro 10 cm und pro $\left(\mathrm{g/cm^3}\right)$:

Traubenzucker	$\delta_0 = 91.9°$	rechtsdrehend
Rohrzucker	$\delta_0 = 66.45°$	rechtsdrehend
Fruchtzucker	$\delta_0 = -91.9°$	linksdrehend

Elektromagnetische Lichtschalter

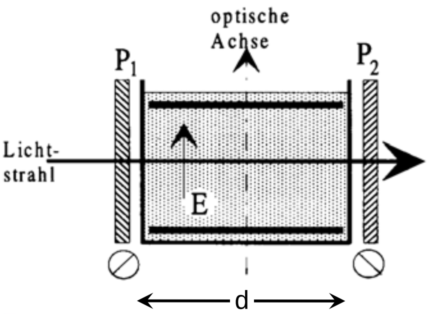
Elektrische und magnetische Felder können in sonst isotropen Substanzen Doppelbrechung oder auch optische Aktivität hervorrufen.

Kerr-Effekt

Gewisse **Flüssigkeiten mit polaren Molekülen**, wie Nitrobenzol und Nitrotoluol, werden in einem **starken elektrischen Feld ($E \geq 10^6$ V·m^{-1}) doppelbrechend**. Sie verhalten sich dann so wie ein **einachsiger Kristall**, dessen optische Achse mit der Richtung des elektrischen Feldes zusammenfällt.

Faraday-Effekt

Bestimmte **Stoffe**, wie Bleiglas, Quarz oder Natriumchlorid, bewirken eine Drehung der Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht, wenn man sie in ein **starkes Magnetfeld** bringt. Sie werden in Magnetfeldern optisch aktiv.



Kerr Effekt

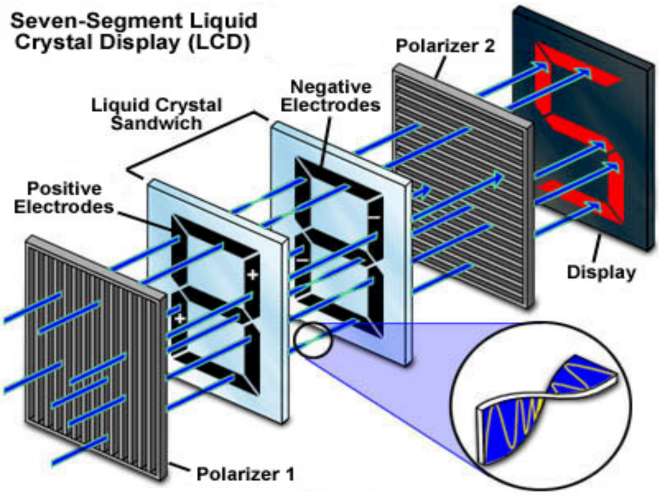
Schema einer Kerr-Zelle. P_1 und P_2 sind zwei gekreuzte Polarisationsfilter.
Das elektrische Feld weist senkrecht nach oben.
Ohne Feld tritt kein Licht durch den zweiten Polarisationsfilter.

Tritt linear polarisiertes Licht senkrecht zum äusseren Feld und mit der Polarisationsebene im Winkel von 45° gegenüber der Feldrichtung in die Flüssigkeit, ergibt sich nach der Strecke d der **Gangunterschied** D zwischen dem ordentlichen und ausserordentlichen Strahl:

$$\Delta = (n_o - n_{ao}) \cdot d = K \cdot d \cdot \vec{E}^2$$

K ist die so genannte **Kerr-Konstante**.
Durch Einschalten des Feldes wird aus dem linear polarisierten Licht elliptisch polarisiertes, das teilweise durch die zweite Polarisationsfolie durchtreten kann. **Falls Δ gerade eine halbe Wellenlänge beträgt**, gibt die Überlagerung der ordentlichen und der ausserordentlichen Welle wieder **linear polarisiertes Licht**, das aber **um 90° gedreht** ist und somit ungehindert durch den zweiten Filter durchtreten kann.
Der Kerr-Effekt kann als **schneller Lichtschalter (bis 10^8Hz)** verwendet werden.
Siehe auch LCD Flüssigkristallanzeigen.

Flüssigkristallanzeigen



Polarisiertes Licht trifft auf einen flüssigen Kristall, welcher normalerweise die **Polarisationsebene um 90° dreht**.
Das Licht kann so den zweiten Polarisationsfilter ungehindert passieren. **Die Anzeige leuchtet auf.**

Liegt eine **Spannung** zwischen der positiven und negativen Elektrode an, werden die **Moleküle des Flüssigkristalls entlang der elektrischen Feldlinien ausgerichtet**.
Der **Flüssigkristall verliert** zwischen diesen Elektroden **seine optische Aktivität**. Das polarisierte Licht wird nun vom zweiten Polarisationsfilter absorbiert. **Die Anzeige bleibt schwarz**.

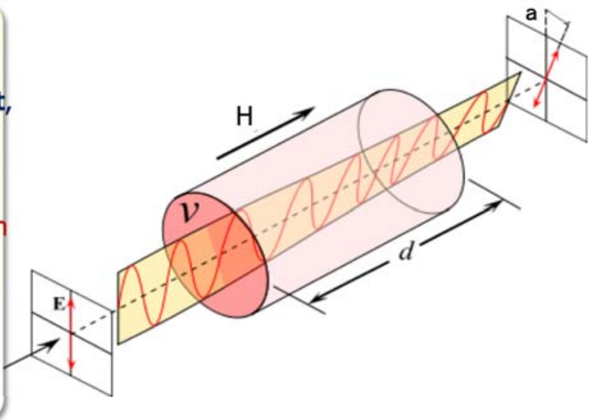
Flüssigkristallanzeigen beruhen auf dem Prinzip der Drehung der Schwingungsebene von polarisiertem Licht.

Faraday Effekt

Bestimmte Stoffe, wie Bleiglas, Quarz oder Natriumchlorid, bewirken eine **Drehung der Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht**, wenn man sie in ein **starkes Magnetfeld bringt.** Sie werden in Magnetfeldern optisch aktiv.

Der **Drehwinkel** α hängt ausser von der durchstrahlten Strecke d auch von der Magnetfeldstärke H und einer Materialkonstanten V (**Verdet'sche Konstante**) ab:

$$\alpha = V \cdot d \cdot H$$

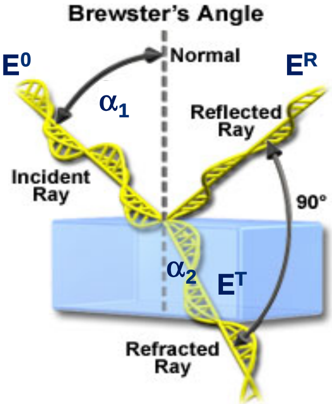


Auch mit Hilfe des Faraday-Effektes lässt sich Licht schnell modulieren (bis 200 MHz).

Als Materialien besonders zu erwähnen sind hier ferro-magnetische Granate seltener Erden, wie beispielsweise Ga-dotiertes Yttrium-Eisen-Granat. Der Drehwinkel hängt, wegen dem Ferromagnetismus, nicht mehr linear vom äusseren Magnetfeld ab.
Im Sättigungsbereich (Hysteresiskurve) ergeben sich **Drehwinkel von rund 10° / mm**.
Solche Materialien sind für **sichtbares Licht nicht**, jedoch **für Infrarotstrahlung transparent.**

Die **Drehung der Polarisationsebene von Radiowellen** beim **Durchgang durch die Atmosphäre** ist ebenfalls auf den Faraday-Effekt zurückzuführen.

Reflexion und Transmission



Fresnel-Formeln

Trifft Licht auf ein **homogenes Dielektrikum** mit ideal glatter Oberfläche, dann wird ein Teil des Lichtes **reflektiert**, ein anderer Teil dringt in das Dielektrikum ein und wird **gebrochen**.

Der reflektierte Anteil hängt dabei von der **Polarisation des Lichtes** ab.

Fresnel hat aus den **Maxwell´schen Gleichungen** sowie aus **Stetigkeitsbedingungen** für die Amplitude elektro-magnetischer Wellen an der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika (ladungs- und stromfrei) folgende Bedingungen für den elektrischen Feldvektor der **reflektierten** $\mathbf{E^R}$ sowie **transmittierten** $\mathbf{E^T}$ Welle für parallele und senkrechte Polarisation hergeleitet (*Fresnel-Formeln*):

Polarisation parallel zur Zeichenebene:

$$E_{\|}^{R} = -\frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot E_{\|}^{0} \qquad E_{\|}^{T} = \frac{2\cos\alpha_1 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \cdot E_{\|}^{0}$$

Polarisation senkrecht zur Zeichenebene :

$$E_{\perp}^{R} = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot E_{\perp}^{0} \qquad E_{\perp}^{T} = \frac{2\cos\alpha_1 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot E_{\perp}^{0}$$

Reflexionskoeffizienten

α_1 und α_2 bezeichnen Einfalls- und Ausfallswinkel zum Lot auf die Grenzfläche. Es gilt zudem nach dem Brechungsgesetz $\mathbf{\sin\alpha_1 / \sin\alpha_2 = n_2 / n_1}$.
Indizes haben folgende Bedeutung: **0 = einfallender Strahl**, **R = reflektiert**, **T = transmittiert**, **⊥ = senkrecht**, **|| = parallel**.

Die **Intensität J** eines parallelen Lichtbündels ist **proportional zum Quadrat der Amplitude** des elektrischen Feldes. Damit lässt sich der **Reflexionskoeffizient** $\mathbf{R_\perp}$ für senkrechte **und** $\mathbf{R_\|}$ für parallele Polarisation an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit **Brechungsindizes** $\mathbf{n_1}$ **und** $\mathbf{n_2}$ bestimmen.

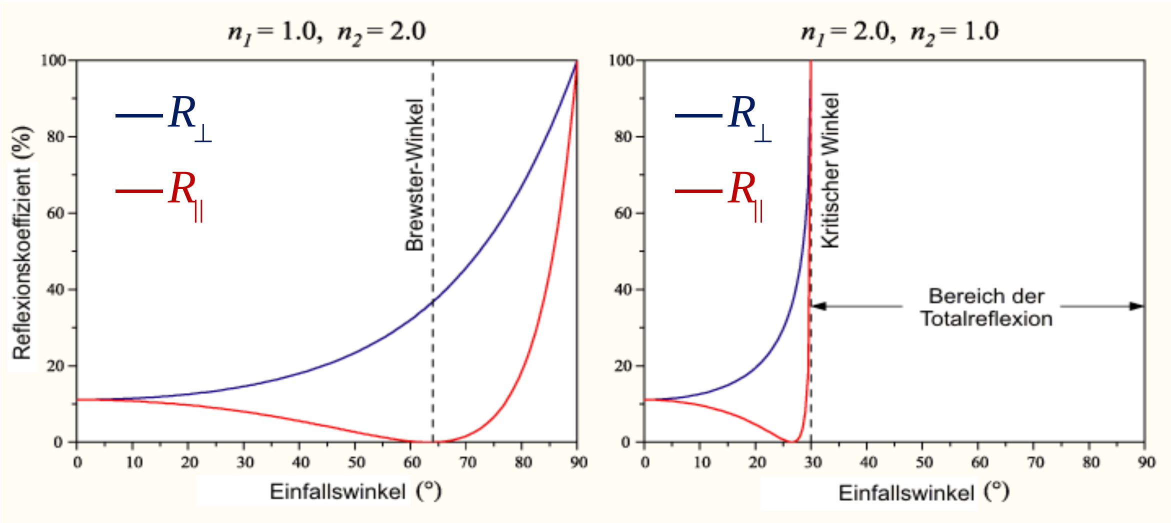
Reflexionskoeffizient $R_{\|}$

$$R_{\|} = \left(\frac{E_{\|}^{R}}{E_{\|}^{0}}\right)^2 = \frac{\tan^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan^2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Reflexionskoeffizient $R_{\perp}$

$$R_{\perp} = \left(\frac{E_{\perp}^{R}}{E_{\perp}^{0}}\right)^2 = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Reflexionskoeffizienten



Beim **Brewsterwinkel** wird parallel polarisiertes Licht überhaupt nicht reflektiert. Senkrecht polarisiertes Licht hingegen wird teilweise reflektiert.

Bei **Totalreflexion** werden parallel und senkrecht polarisiertes Licht vollständig reflektiert.

Reflexionskoeffizient von unpolarisiertem Licht

Bei unpolarisiertem Licht ist keine Richtung der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ ausgezeichnet, somit gilt: $\overline{E^2_{\parallel,0}} = \overline{E^2_{\perp,0}}$

Damit erhält man für den Reflexionsgrad R der Intensität:

$$R = \frac{J_r}{J_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\tan^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan^2(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)$$

Dies gestattet, den Reflexionsgrad R bei gegebenem Einfallswinkel α_1 zu berechnen.

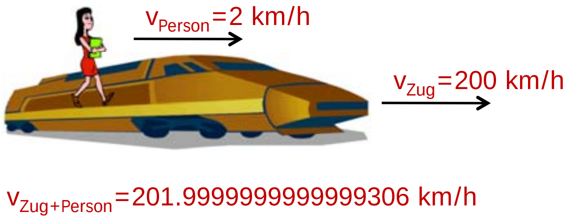
Für den senkrechten Einfall $(\alpha_1 = 0)$ wird der Ausdruck aber unbestimmt.

Für einen kleinen Einfallswinkel gilt $\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 \approx \alpha_1$ und $\sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 \approx \alpha_2$.

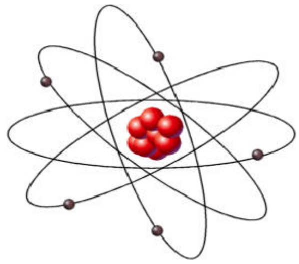
In diesem Fall folgt

$$R \approx \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \approx \frac{(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)^2}{(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)^2} = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}$$

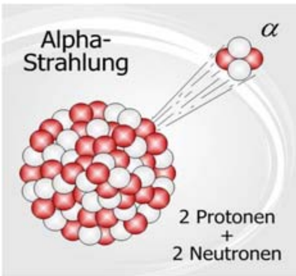
Moderne Physik



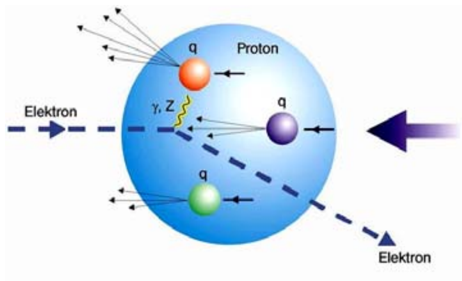
Relativität



Atome



Kerne



Elementarteilchen

"Klassische" Physik

Als **klassische Physik** bezeichnet man diejenigen physikalischen Theorien, die bis zum Ende des 19. Jahrhunderts ausgearbeitet wurden. Insbesondere sind dies die **klassische Mechanik**, die **Elektrodynamik**, die **Thermodynamik** und die **Optik.**

Die klassische Physik beruht auf <u>fundamentalen Annahmen</u>, die sich ab Beginn des 20. Jahrhunderts als nicht haltbar erwiesen. Einige davon sind:

Determinismus

Das heisst, wenn die Anfangsbedingungen eines Systems bekannt sind, kann das System (im Prinzip) in alle Zukunft berechnet werden. Tatsächlich kann man Ort und Impuls eines Objekts nicht gleichzeitig beliebig genau kennen. Es sind nur noch Wahrscheinlichkeiten vorausberechenbar.

Absolute Zeit

Das heisst, dass in jedem Bezugssystem dieselbe Zeit gilt. Tatsächlich hängt Zeit jedoch vom Bezugssystem ab in dem sie gemessen wird.

Kräfte wirken instantan und über beliebig grosse Distanzen

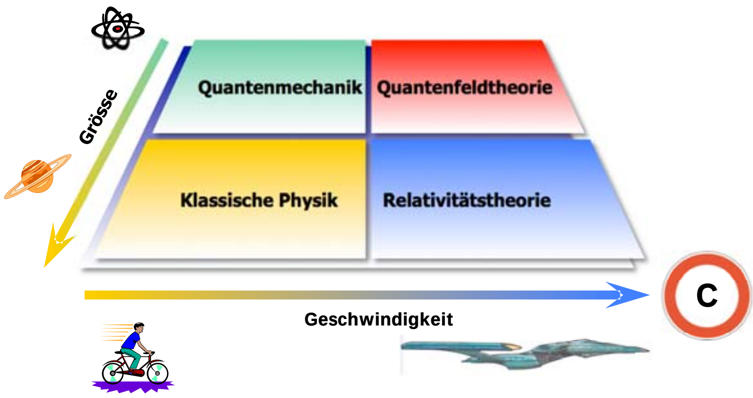
Das heisst, dass eine Wirkung sofort auftritt und nicht erst nach einer bestimmten Laufzeit. Bewegt sich die Sonne bei ihrem Umlauf um das Zentrum der Milchstrasse, wirkt auf die Erde das neue veränderte Gravitationsfeld der Sonne erst nach einer Verzögerung von ca. 8 Minuten, was gerade der Distanz Erde-Sonne bei Lichtgeschwindigkeit entspricht.

Die Bindungsenergie eines gebunden Systems kann beliebige Werte annehmen

Das heisst, Prozesse laufen kontinuierlich ab; es gibt keine Sprünge. Tatsächlich ist Energie gequantelt; es gibt Quantensprünge.

"Moderne" Physik

Moderne Physik bricht radikal mit vielen klassischen Vorstellungen. Trotzdem ist die klassische Physik nicht falsch, sie ist vielmehr ein Spezialfall der modernen Physik.



Die klassische Physik behält ihre Aussagekraft und Eleganz, wenn Geschwindigkeiten und Grössen der zu beschreibenden Objekte nicht zu extrem sind. So gelten die klassischen Gesetze bei Geschwindigkeiten die klein sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit und Grössen die grösser sind als typischerweise Moleküle.

Insbesondere ist der Aufbau der Materie nur im Rahmen der Quantenmechanik beschreibbar.

1900 Energiequantenhypothese – Max Planck

Die Strahlung eines schwarzen Körpers der Temperatur T kann berechnet, und mit experimentellen Messresultaten in Übereinstimmung gebracht werden, wenn man verlangt, dass die Moleküle (=Hertz´sche Dipole) eines schwarzen Körpers nur bestimmte Energiewerte annehmen dürfen.

→Energie ist gequantelt!

$$E = n \cdot h \cdot \nu$$

E : Energie einer molekularen Schwingung

h : Planck'sches Wirkungsquantum

$$h = 6{,}6260693(11) \times 10^{-34}\, Js$$

ν : Frequenz der molekularen Schwingung

n : ganze Zahl 1,2,3,…

Max Karl Ernst Ludwig Planck
* 23. April 1858 in Kiel
† 4. Oktober 1947 in Göttingen

Nobelpreis 1918
"für die Entdeckung von Energiequanten"

1905 Lichtquanten und Relativitätstheorie – Albert Einstein

$E_\gamma = h \cdot \nu$

E_γ : Energie eines Lichtquants (Photon)

h : Planck'sches Wirkungsquantum

$h = 6{,}6260693(11) \times 10^{-34}\, Js$

ν : Frequenz der Strahlung (Photon)

1905
Lichtquantenhypothese

$E = mc^2$

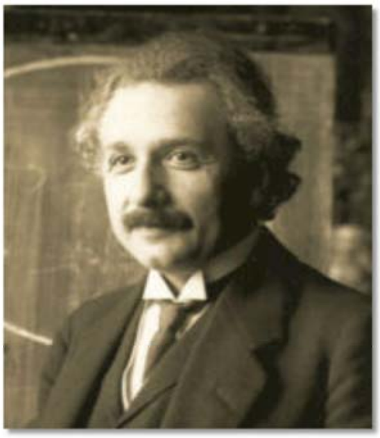
E : Energie

m : Masse

c : Lichtgeschwindigkeit

$c \equiv 299\,792\,458\; m/s \quad (\text{exakt})$

1905
Spezielle Relativitätstheorie

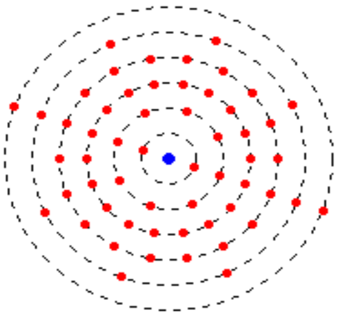


Alber Einstein
* 14. März 1879 in Ulm
† 18. April 1955 in Princeton, USA

Nobelpreis 1921
"zur Erklärung des Photo-elektrischen Effekts"

1913 Atommodell – Niels Bohr

Niels Bohr gelingt es die Quantentheorie auf Atome anzuwenden, und schafft so das erste halbwegs brauchbare Atommodell.

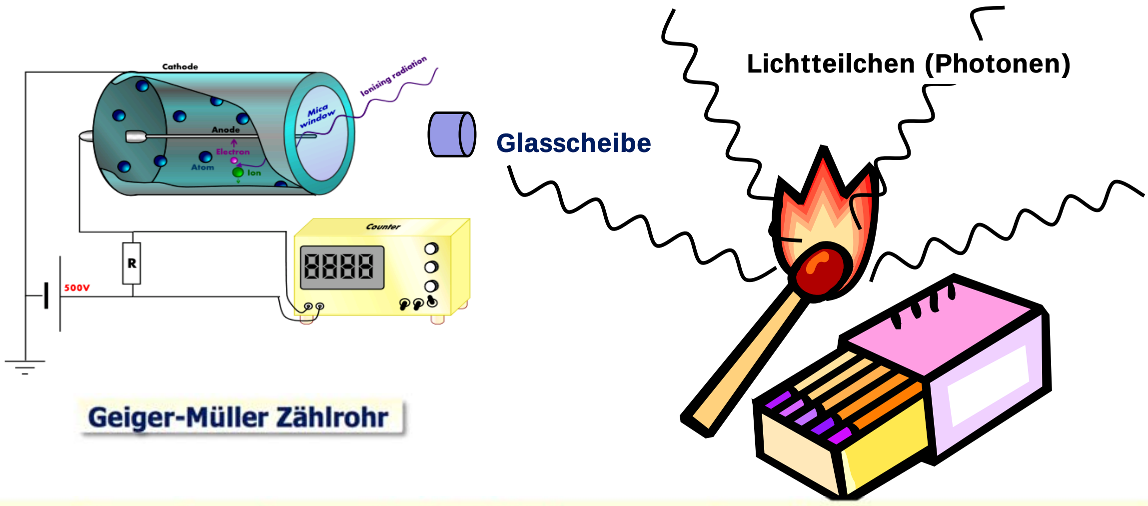


1913
Bohr´sches Atommodell
Elektronen bewegen sich auf festen, stabilen Bahnen

Niels Henrik David Bohr
* 7. Oktober 1885 in Kopenhagen
† 18. November 1962 in Kopenhagen

Nobelpreis 1922
"zur Erklärung der Struktur der Atome und der von ihnen ausgehenden Strahlung"

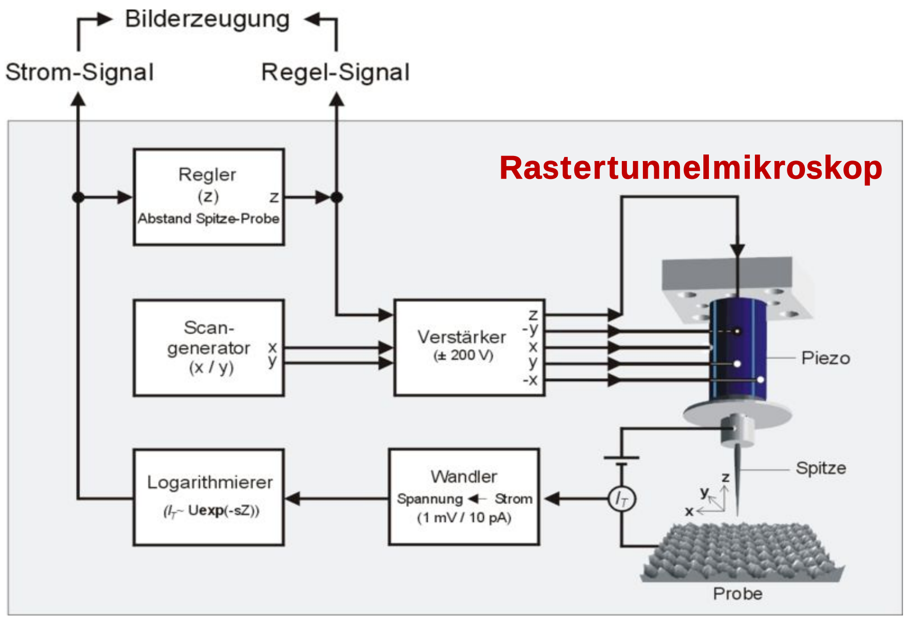
Teilchennatur von Licht



Photonen, die von einem brennenden Streichholz ausgesandt werden, erzeugen stochastische Signale in einem Geiger-Müller Zählrohr. Die stochastische Natur des Signals lässt auf eine Teilcheneigenschaft des Lichts schliessen.

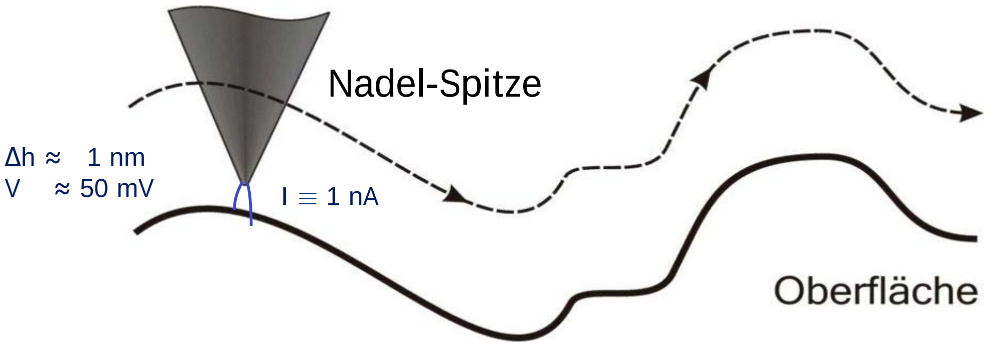
Eine Glasscheibe ist transparent für sichtbares Licht, UV-Licht, hingegen, wird mehrheitlich im Glas absorbiert. Die Zählrate des Zählrohrs verringert sich bei Verwendung einer Glasscheibe zwischen dem Zählrohr und dem Streichholz auf fast Null. Dies bedeutet, dass das Zählrohr nur Photonen im UV Bereich messen kann.

Einzelne Atome sichtbar machen



Mit einem Rastertunnelmikroskop können leitende Oberflächen mit Hilfe einer äusserst feinen Spitze abgetastet werden. Die Auflösung ist so gut, dass einzelne Atome so sichtbar werden.

Tunnelstrom

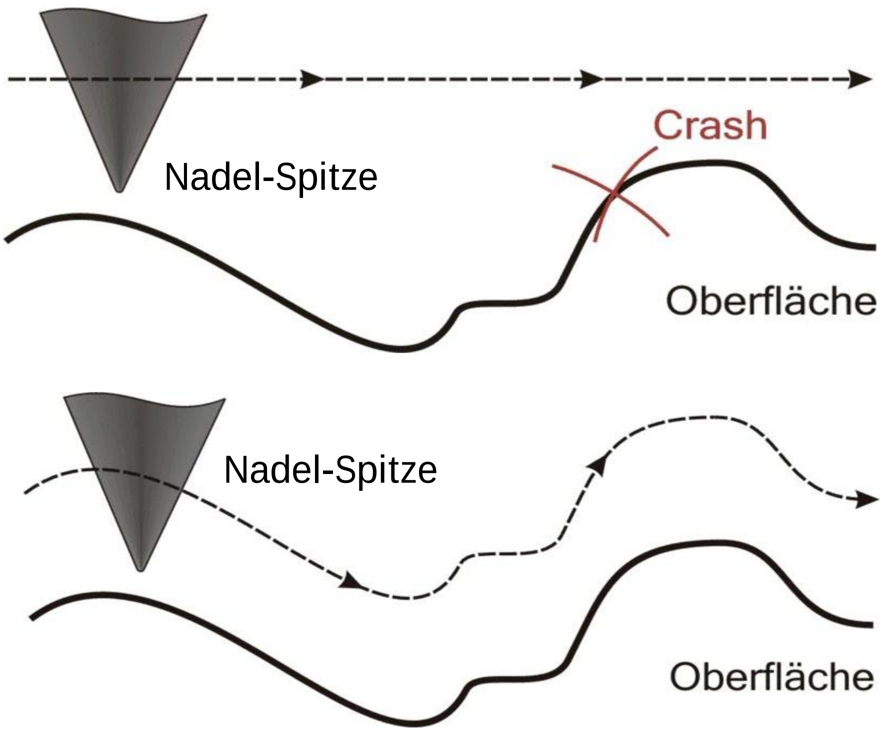


Elektronen von Oberflächenatomen ”tunneln” durch Vakuum (Luft) in die Spitze hinein, wobei so ein messbarer Strom entsteht.
Dieser Strom ist stark vom Abstand der Spitze zur Oberfläche abhängig.

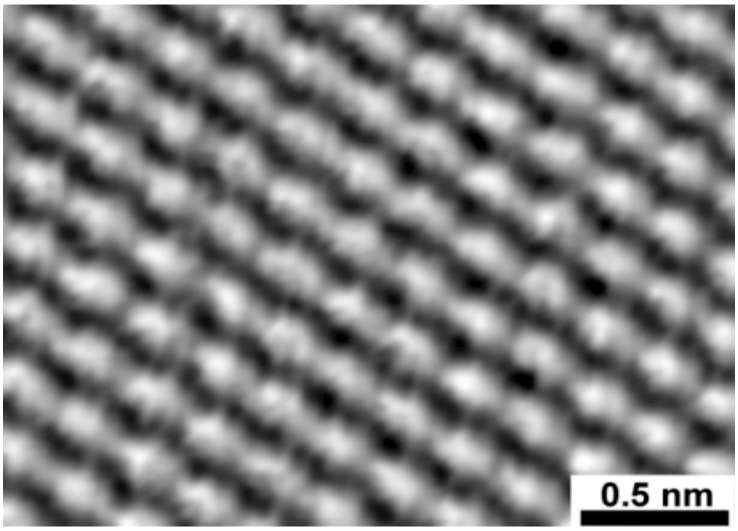
Misst man diesen Tunnel-Strom kann so der Abstand der Nadel zur Oberfläche auf 1% eines Nanometers gemessen werden.

Ein typischer Abstand Δh der Nadelspitze zur Oberfläche ist ca. 1 nm bei einer typischen Spannung V von ca. 50 mVolt.

Steuern der Nadelspitze



Graphitoberfläche in atomarer Auflösung



Die Atomare Struktur der Graphitoberfläche wird in dieser Rastertunnel-Mikroskopaufnahme als regelmässiges Muster deutlich.

Graphitatome haben dementsprechend einen Durchmesser von ca. 0.2 nm.

Maxwell Gleichungen im Vakuum

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\qquad \vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\qquad \vec{H}=\frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_{el}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

1865 – Maxwell Gleichungen

James Clerk Maxwell
* 13. Juni 1831 in Edinburgh
† 5. November 1879 in Cambridge

Elektrische Feldkonstante $\varepsilon_0=\frac{1}{\mu_0 c^2}=8.8541\ldots\times10^{-12}\,\mathrm{Vs}/\mathrm{Am}$

Magnetische Feldkonstante $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{As}/\mathrm{Vm}$

Im Vakuum gilt:

keine Ströme $\Rightarrow$ $\vec{j}=0$

keine Ladung $\Rightarrow$ $\rho_{el}=0$

Dielektrizitätskonstante $\varepsilon=1$

Magnetische Permeabilität $\mu=1$

Maxwell Gleichungen im Vakuum:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

Elektromagnetische Wellen

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\qquad\Rightarrow\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{0})-\Delta\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=\underbrace{\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{-\Delta\vec{B}\cdot\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}=-\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\Rightarrow\Delta\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\text{analog}\Rightarrow\Delta\vec{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Wellengleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$u(x,t)$ Wellenfunktion $\rightarrow$ Auslenkung der Welle

υ Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$\Rightarrow\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit}\quad c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=299792458\,{}^{m}/_{s}\quad(\text{exakt})$$

Aus den Maxwell Gleichungen im Vakuum folgt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen (=Lichtgeschwindigkeit) c=konstant ist!
D.h. unabhängig von Wellenlänge und Frequenz.

In welchem Bezugssystem soll dies gelten?

Relativitätstheorie

Zur Zeit um 1900 waren die **Maxwell Gleichungen** und die in ihr beinhalteten **Lichtwellen**, die sich mit **konstanten Geschwindigkeit c** ausbreiten, schon längst bekannt.

Die Frage war nun, wie es sein kann, dass sich Licht unabhängig vom Beobachter mit konstanter Geschwindigkeit ausbreitet, und was dies für ein Medium sein muss, in dem sich das Licht ausbreitet.

Dies führte auf den Begriff des **Lichtäthers**, der als ein stationäres raumfüllendes Medium eingeführt wurde, in dem sich das Licht ausbreitet und das alle Materie durchdringt.

Um die experimentellen Befunde der damaligen Zeit zu erklären wurden dem Lichtäther immer mehr Eigenschaften zugeschrieben um Effekte wie **Zeitdilatation** und **Längenkontraktion** zu erklären. Physiker wie Hendrik Anton Lorentz, Henri Poincaré, und weitere hatten dazu geforscht.

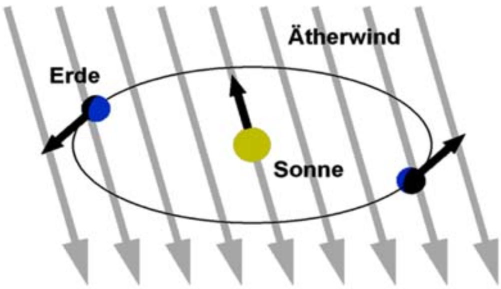
Einstein hat mit diesem Lichtäther Schluss gemacht und die **Relativitätstheorie** auf einfachen Prinzipien beruhend als neue umfassende Theorie zur Erklärung der **Dynamik von bewegten Objekten in Raum und Zeit eingeführt**.

Äther

Aristoteles hatte schon um 340 v.Chr. den Ätherbegriff als ein raumfüllendes Medium eingeführt. Aristoteles brauchte diesen Äther um kreisförmige Planetenbahnen und die Position der Fixsterne zu erklären.

Christiaan Huygens interpretierte um 1690 das **Licht als Wellenphänomen** und führte den **Lichtäther als Trägermedium für die Ausbreitung des Lichts** ein – in Analogie zur Luft die ein Trägermedium für Schallwellen ist.

Dieser Lichtäther durchdrang nach seiner Vorstellung die feste Materie ebenso wie den leeren Raum des Weltalls. Der Äther transportiert gemäß dieser Vorstellung nicht nur Lichtstrahlen, sondern auch die Wärmestrahlung.



Der Ätherbegriff war bis ins 20. Jahrhundert eine allgemein anerkannte physikalische Grundvorstellung.

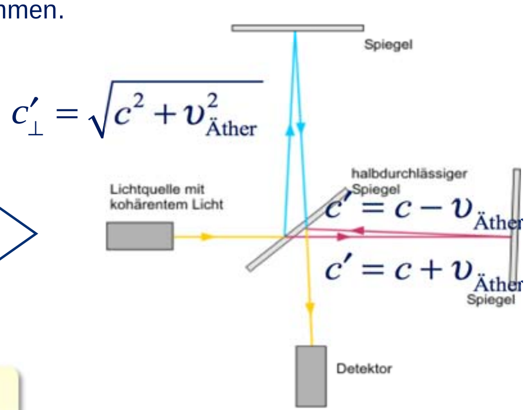
Michelson-Morley Experiment: Messen der Geschwindigkeit des Ätherwindes

Falls tatsächlich ein Äther existieren sollte:
Die gemessene Lichtgeschwindigkeit setzt sich aus der Lichtgeschwindigkeit c plus der Geschwindigkeit $\upsilon_{\text{Äther}}$ des Ätherwindes zusammen.

Falls es einen Äther gäbe, würde die von der Erde aus gemessene Richtung des Ätherwindes relativ zum Fixsternhimmel variieren.

Das Experiment wurde zu verschiedenen Jahreszeiten durchgeführt.

Ätherwind υ



Resultat:

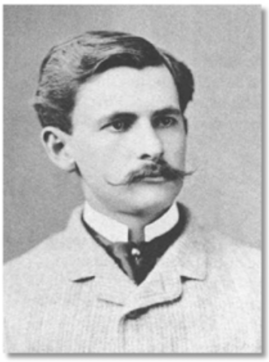
$\upsilon_{\text{Ätherwind}} = 0$ zu allen Jahreszeiten!

Es gibt keinen Äther!

Das berühmteste fehlgeschlagene Experiment!

Das resultierende **Interferenz-muster** müssten von der räumlichen Orientierung der Apparatur abhängen.

Michelson-Morley-Experiment



1881 arbeitete Michelson an einem Experiment, das als Michelson-Morley-Experiment in die Geschichte der Physik eingegangen ist.

Dabei sollte die Bewegung der Erde relativ zum Äther ermittelt werden, einem hypothetischen Medium, das man als Träger von Lichtwellen annahm.

Wider Erwarten ließ sich aber auf diese Weise eine Bewegung der Erde durch einen Ätherwind nicht feststellen.

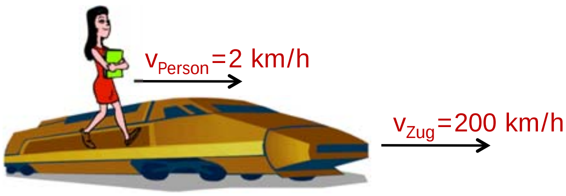
Dieses Experiment gilt als einer der Grundpfeiler der **Relativitätstheorie**.

Albert Abraham Michelson
* 19. Dezember 1852 in Strelno (Provinz Posen)
† 9. Mai 1931 in Pasadena (Kalifornien)

1907 Nobelpreis
„für seine optischen Präzisionsinstrumente und die damit ausgeführten spektroskopischen und metrologischen Untersuchungen“

Relativitätstheorie

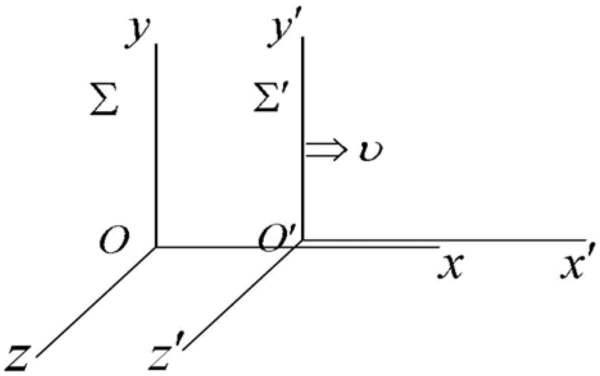
Lorentz-Transformation
Addition von Geschwindigkeiten



$v_{Zug+Person}$=201.9999999999999306 km/h

Definition eines Inertialsystems

Inertialsysteme (IS): sind Bezugsysteme, in denen das Trägheitsprinzip gilt, nach dem sich Körper ohne Krafteinwirkung entweder in Ruhe befinden oder sich geradlinig gleichförmig bewegen.



Σ und Σ' sind beides Inertialsysteme, die als zwei rechtshändige Koordinatensysteme beschrieben werden, die sich zueinander entlang der x-Achse mit der Geschwindigkeit υ bewegen. Zum Zeitpunkt $t=0$ sind der Ursprung O und O' identisch. Die Achsen x, y und z sind so gewählt, dass sie jeweils parallel zu den Achsen x', y' und z' sind.

Lichtgeschwindigkeit c = konstant

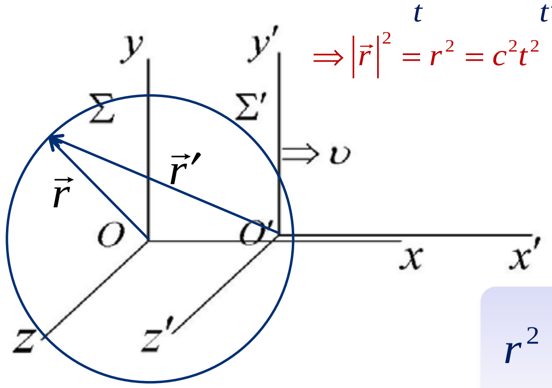
Beobachte einen Lichtblitz zur Zeit $t=t'=0$
in zwei Bezugssystemen Σ und Σ', welche sich mit der Geschwindigkeit υ relativ zueinander bewegen:

Klassische aber falsche Vorstellung: $c = \dfrac{|\vec{r}|}{t}$ und $c' = \dfrac{|\vec{r}'|}{t}$

Das Michelson-Morley Experiment besagt, dass c=c′

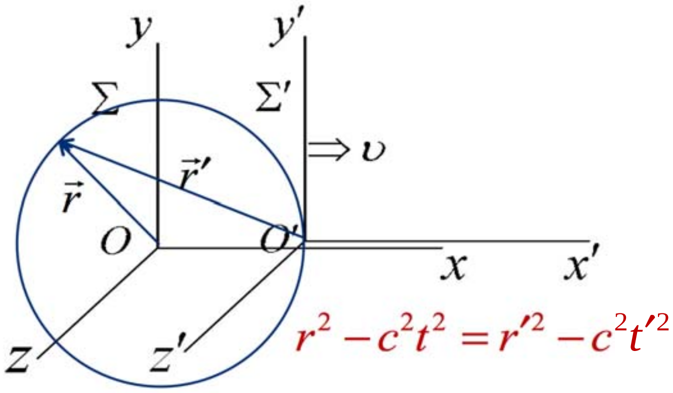
$\Rightarrow c = \dfrac{|\vec{r}|}{t} = c' = \dfrac{|\vec{r}'|}{t'}$ d.h. auch die Zeit t muss transformiert werden!

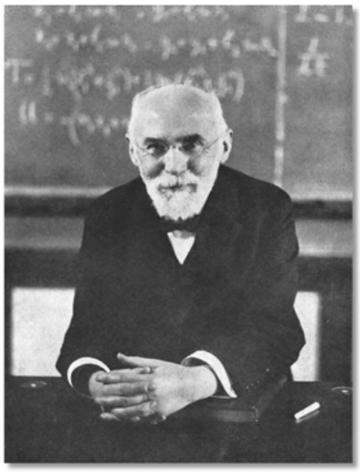
$\Rightarrow |\vec{r}|^2 = r^2 = c^2 t^2$ und $|\vec{r}'|^2 = r'^2 = c^2 t'^2$



$$\left.\begin{array}{l} r^2 = c^2 t^2 \\ r'^2 = c^2 t'^2 \end{array}\right\} \Rightarrow r^2 - c^2 t^2 = r'^2 - c^2 t'^2$$

Hendrik Antoon Lorentz





Hendrik Antoon Lorentz
* 18. Juli 1853 in Arnheim, NL
† 4. Februar 1928 in Haarlem, NL

Raum- und Zeit-Koordinaten unterliegen beide einer Transformation, wenn man vom ruhenden System Σ ins bewegte System Σ' wechselt.

Nobelpreis 1902
„für seine Arbeit über den Einfluss des Magnetismus auf Strahlungsphänomene."

Die **Lorentztransformation** ist die einzige Möglichkeit, welche r^2-c^2t^2 konstant lässt.

1900 – Lorentz-Transformation LT

$$x = \gamma\left[x' + \upsilon t'\right]$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$ct = \gamma\left[ct' + \beta x'\right]$$

Lorentz-Transformation

$$x' = \gamma\left[x - \upsilon t\right]$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$ct' = \gamma\left[ct - \beta x\right]$$

Lorentz-Rücktransformation

wobei:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{\upsilon}{c} \qquad \Rightarrow 0 \le \beta < 1 \quad \Rightarrow 0 \le \upsilon < c$$
$$\Rightarrow 1 \le \gamma < \infty$$

Da x eine reelle Koordinate bedeutet folgt, dass keine Geschwindigkeiten υ grösser als c möglich sind.

Lorentz-Transformation im Grenzfall $\upsilon \ll c$

Lorentzformation

$$x' = \gamma\left[x - \upsilon t\right]$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$ct' = \gamma\left[ct - \beta x\right]$$

Für $\upsilon \ll c$ folgt:

$$\beta = \frac{\upsilon}{c} \to 0 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \to 1$$

$$\upsilon \ll c: \quad \beta \to 0;\ \gamma \to 1$$

$$\Downarrow$$

$$x' = x - \upsilon t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

Galileitransformation

Die Lorentz-Transformation steht nicht im Widerspruch zur Galileitransformation: Bei kleinen Geschwindigkeiten $\upsilon \ll c$ führen sie beide zu denselben Resultaten.

Bei hohen Geschwindigkeiten $\upsilon \lesssim c$ führt jedoch nur die Lorentz-Transformation zu korrekten und im Experiment überprüfbaren Resultaten.

1905 – Einstein'sche Postulate

Postulat 1: **RELATIVITÄTSPRINZIP**
Die Gesetze der Physik sind invariant in allen Inertialsystemen.

Postulat 2: **KONSTANZ DER LICHTGESCHWINDIGKEIT**
Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist gleich dem Wert c – unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle.

$$c \equiv 2.99792458 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$ **(exakt)**

Diesen beiden Postulaten liegt die spezielle Relativitätstheorie zu Grunde.

1905 Annus Mirabili

Albert Einstein

18. März 1905
Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichts betreffenden heuristischen Gesichtspunkt
(Photoelektrischer Effekt)

Am 11. Mai 1905
Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen
(Brown'sche Bewegung)

30. Juni 1905
Zur Elektrodynamik bewegter Körper
(Spezielle Relativitätstheorie)

20. Juli 1905
Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen
(Dissertation)

27. September 1905
Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?
($E=mc^2$**)**

Photo 1905: Am Patentamt in Bern

Albert Einstein
* 14. März 1879 in Ulm
† 18. April 1955 in Princeton, USA

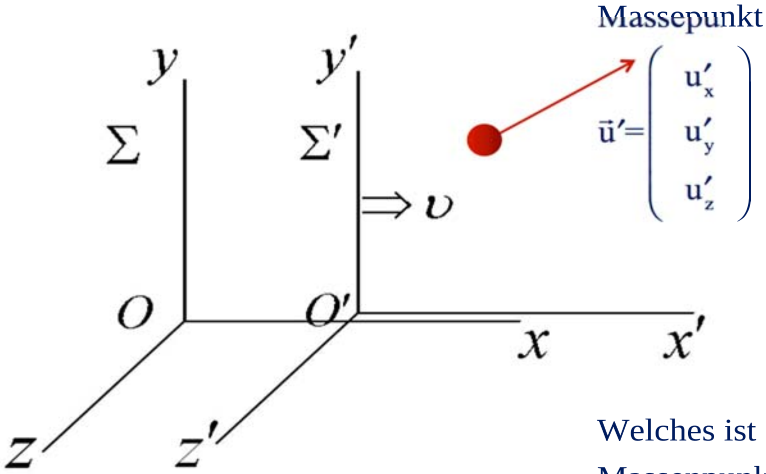
Nobelpreis 1921
"zur Erklärung des Photo-elektrischen Effekts"

171

Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

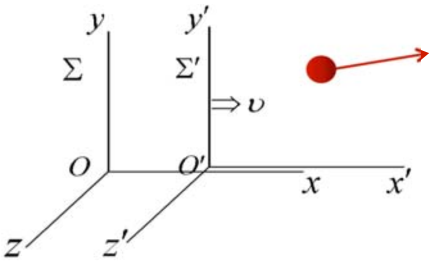
Wir betrachten einen sich bewegenden Massepunkt von zwei Inertialsystemen aus:

Massepunkt mit Geschwindigkeit u' in Σ'



Welches ist die Geschwindigkeit $\vec{u}$ dieses Massenpunkts für einen ruhenden Beobachter vom System Σ aus gesehen?

Relativistische Addition von Geschwindigkeiten



Massepunkt mit Geschwindigkeit u' in Σ'

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix}$$

Für die Geschwindigkeit u_x und u'_x gilt:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \qquad u_x = \frac{dx}{dt}$$

Für dx, dy, dz und dt gelten (LT):

$$dx = \gamma\left[dx' + \upsilon dt'\right]$$

$$dy = dy'$$

$$dz = dz'$$

$$dt = \gamma\left[dt' + \frac{\beta}{c}dx'\right]$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma\left[dx' + \upsilon dt'\right]}{\gamma\left[dt' + \frac{\beta}{c}dx'\right]} = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\beta}{c}u'_x}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left[dt' + \frac{\beta}{c}dx'\right]} = \frac{u'_y}{\gamma\left[1 + \frac{\beta}{c}u'_x\right]}$$

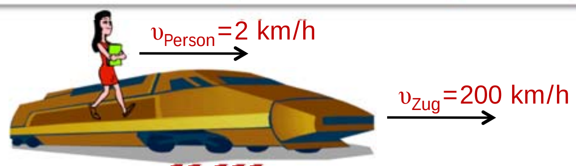
$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma\left[dt' + \frac{\beta}{c}dx'\right]} = \frac{u'_z}{\gamma\left[1 + \frac{\beta}{c}u'_x\right]}$$

Relativistische Geschwindigkeitsaddition

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\beta}{c}u'_x} \qquad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left[1 + \frac{\beta}{c}u'_x\right]} \qquad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left[1 + \frac{\beta}{c}u'_x\right]}$$

Die relativistische Geschwindigkeitsaddition gilt immer für alle möglichen Geschwindigkeiten $0 \le |\upsilon| < c$

Beispiel: Gehen im Zug



$$\upsilon = 200 \text{ km/h} = 55.555 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \beta = \frac{55.555}{299792458} = 1.85\ldots \times 10^{-7}$$

$$u'_x = 2 \text{ km/h} = 0.5555 \text{ m/s}$$

$$u_x = \frac{202 \text{ km/h}}{1 + \frac{1.85\ldots \times 10^{-7}}{299792458} \cdot 0.5555} = \frac{202 \text{ km/h}}{1 + 3.4 \times 10^{-16}}$$

$$= 0.99999999999999966 \times 202 \text{ km/h}$$

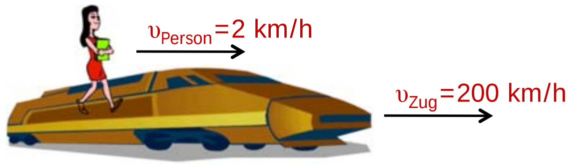
$$= 201.9999999999999306 \text{ km/h}$$

Geschwindigkeitsaddition nach Galilei

$$u_x = u'_x + \upsilon \quad u_y = u'_y \quad u_z = u'_z$$

Galilei – gilt bei kleinen Geschwindigkeiten! $0 \le |\upsilon| \ll c \;\Rightarrow \beta/c \approx 0$ **und** $\gamma \approx 1$

Beispiel: Gehen im Zug



$$\upsilon = 200 \text{ km/h}=55.5 \text{ m/s}$$

$$u'_x = 2 \text{ km/h} = 0.55 \text{ m/s}$$

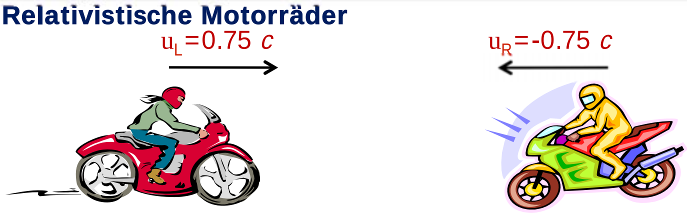
$$u_x = 2 \text{ km/h} + 200 \text{ km/h} = \boxed{202 \text{ km/h}}$$

Relativistische Geschwindigkeitsaddition

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x} \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left[1 + \frac{\beta}{c} u'_x\right]} \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left[1 + \frac{\beta}{c} u'_x\right]}$$

Relativistisch – gilt immer! $0 \le |\upsilon| < c$

Beispiel: Relativistische Motorräder



$\cancel{\upsilon_L - \upsilon_R = 1.5\,c}$?????

Im ruhenden System Σ des unbeteiligten Beobachters bewegt sich das rechte Motorrad mit $u_{R,x} = -0.75c$

Im bewegten System Σ′ des rechten Motorrads ist das rechte Motorrad in Ruhe: $u'_{R,x} = 0$

Es gilt die Lorentztransformation:

$$-0.75c = u_{R,x} = \frac{u'_{R,x} + \upsilon}{1 + \frac{\beta}{c} u'_{R,x}}$$

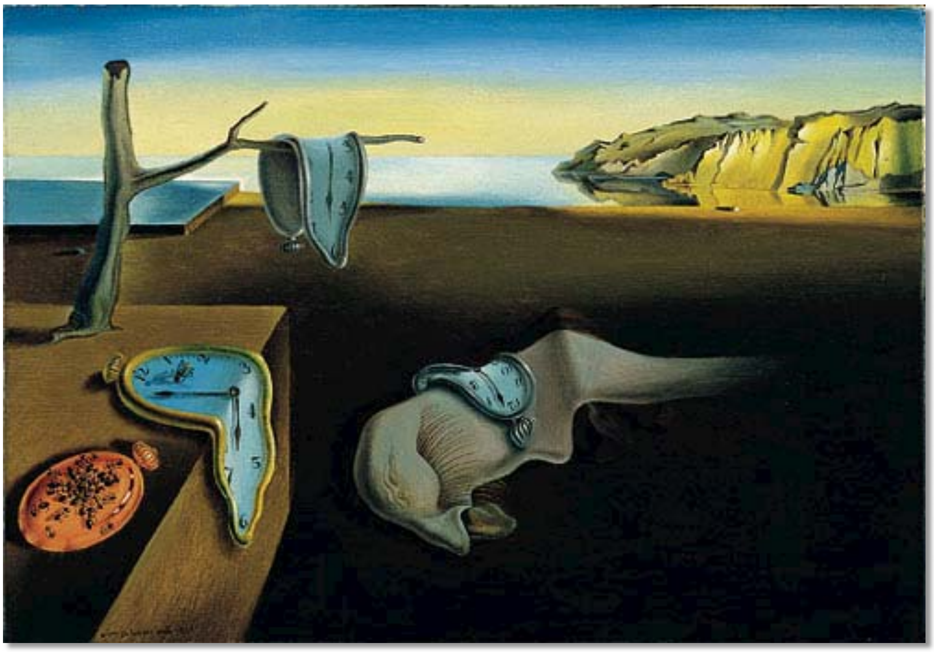
Entsprechend folgt: $\upsilon = -0.75c$ und somit ist $\beta = -0.75$.

Für die Geschwindigkeit des linken Motorrads, gemessen im Ruhesystem des rechten Motorrads Σ′, gilt:

$$u'_{L,x} = \frac{u_{L,x} - \upsilon}{1 - \frac{\beta}{c} u_{L,x}} = \frac{0.75\,c - (-0.75)\,c}{1 - \frac{-0.75}{c} \cdot 0.75\,c} = \frac{1.5\,c}{1 + 0.75^2} \boxed{= 0.96\,c \quad < c\,!!}$$

Zeitdilatation und Längenkontraktion

Die Anwendung der Lorentz-Transformation führt zu ”merkwürdigen” Konsequenzen !



Was ist Zeit?

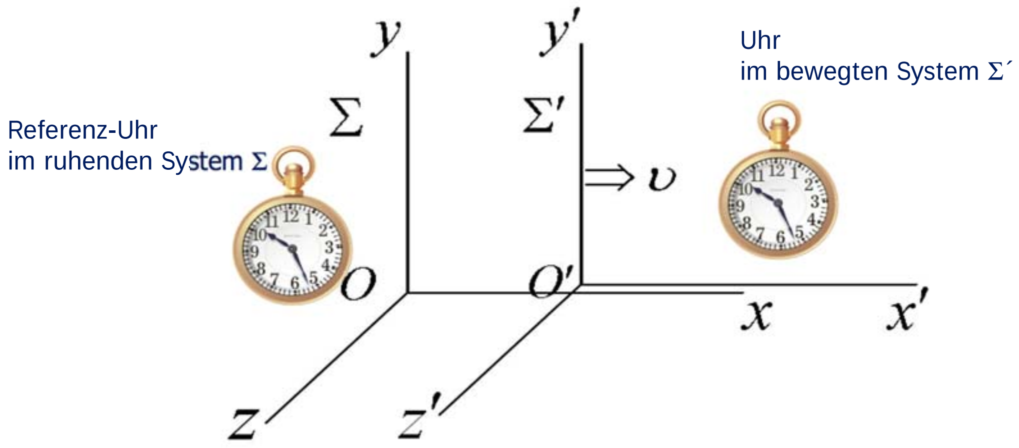
- **Albert Einstein** (1879-1955; Nobelpreis 1921):
  Der Unterschied zwischen Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft ist für uns Wissenschaftler eine Illusion, wenn auch eine hartnäckige.

- **Richard Feynman** (1918-1988; Nobelpreis 1965):
  Was ist Zeit? Es wäre schön, wenn wir eine gute Definition der Zeit finden könnten ... was jedoch wirklich wichtig ist, ist nicht, wie wir Zeit definieren, **sondern wie wir sie messen.**

- **Aristoteles** (384-322 v.Chr.):
  Wir **messen** also nicht nur die Bewegung durch die Zeit, sondern auch die Zeit durch die Bewegung, weil sie einander begrenzen und bestimmen. So bestimmt also die Zeit die Bewegung selbst als Zahl und genauso die Bewegung die Zeit.

- und viele weitere Zitate kluger Köpfe...

Zeitdilatation



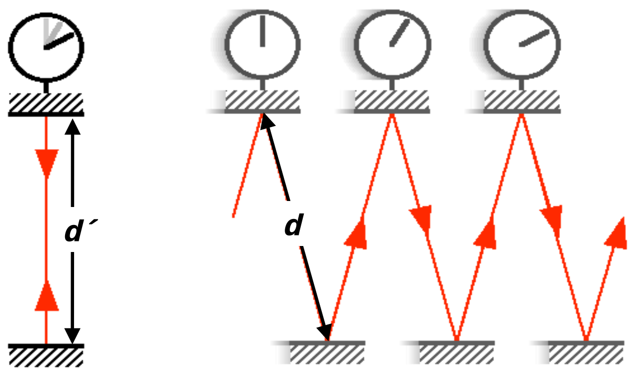
Betrachte die bewegete Uhr vom ruhenden System Σ aus, und vergleiche mit ruhender Referenzuhr.

d.h. man **misst** die Stellung des Sekundenzeigers der bewegten Uhr vom ruhenden System Σ aus gesehen.

Zeitdilatation – Lichtuhr

Eine **Lichtuhr** besteht aus **zwei Spiegeln** im **Abstand *d***, die einen kurzen Lichtblitz hin und her reflektieren.

Befinden sich Beobachter und Lichtuhr im selben System Σ', benötigt ein Blitz für den Weg zwischen den Spiegeln die **Zeit** $t' = d'/c$.



Wird nun eine mit **Geschwindigkeit** υ bewegte Lichtuhr betrachtet, muss das Licht aus Sicht des ruhenden Beobachters zwischen den Spiegeln eine **grössere Strecke** zurücklegen als bei der ruhenden Uhr.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bedingt nun, dass für den ruhenden Beobachter **die bewegte Uhr langsamer läuft als die ruhende Uhr**.

Die Zeit $t = d/c$, die der Lichtblitz für den Weg d, zwischen den Spiegeln benötigt, ergibt sich über den Satz des Pythagoras:

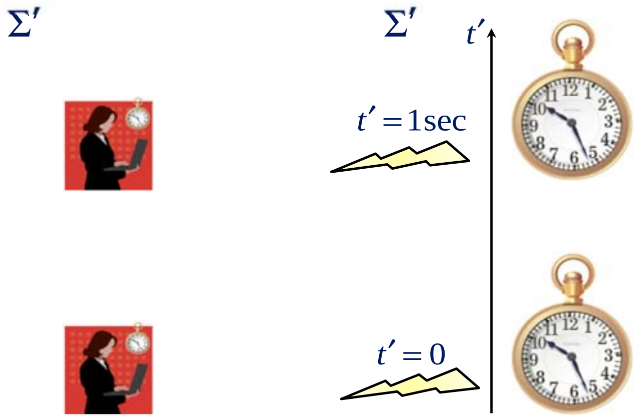
$$d^2 = d'^2 + (\upsilon t)^2$$

$$(ct)^2 = (ct')^2 + (\upsilon t)^2$$

$$t^2 = t'^2 + \underbrace{\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}_{\beta^2} t^2$$

$$t = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{\gamma} t' = \gamma t'$$

Zeitdilatation

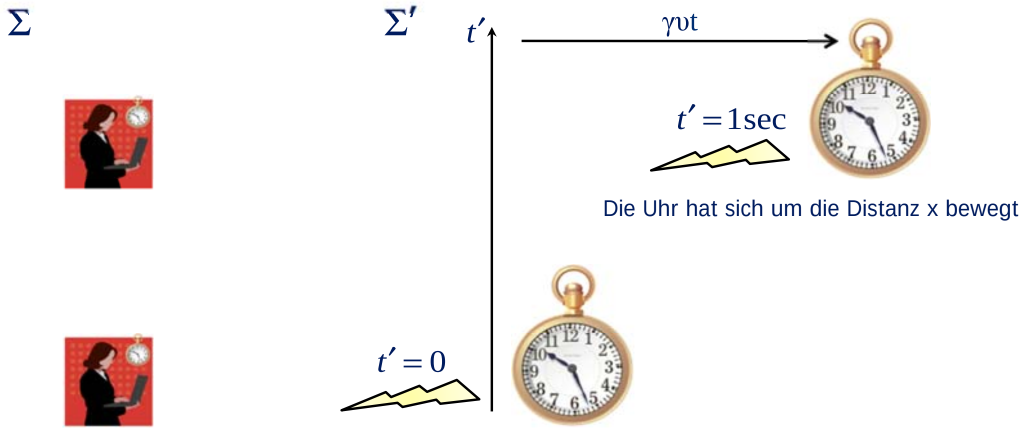


Betrachte die Uhr im mitbewegten System Σ'

d.h. Man **misst** die Stellung des Sekundenzeigers
Jede Sekunde bewegt sich dieser – man misst also die Photonen welche vom Sekundenzeiger reflektiert werden und **vergleicht die Ankunftszeit dieser Photonen mit der eigenen Uhr.**

Messresultat: Es vergeht 1 Sekunde zwischen zwei Stellungen des Sekundenzeigers

Zeitdilatation



Betrachte die bewegte Uhr vom ruhenden System Σ aus

d.h. Man **misst** die Stellung des Sekundenzeigers
Jede Sekunde bewegt sich dieser – man misst also die Photonen welche vom Sekundenzeiger reflektiert werden und **vergleicht die Ankunftszeit dieser Photonen mit der eigenen Uhr.**

Messresultat: Es vergeht länger als 1 Sekunde zwischen zwei Stellungen des Sekundenzeigers der bewegten Uhr. Da das zweite Photon nun einen längeren Weg zurücklegen muss und zusätzlich auch wegen der Zeitdilatation ***(siehe hierzu die nächsten beiden Seiten).***

Zeitdilatation

Bewegtes System Σ': $\Delta t' = t_2' - t_1'$ [Eigenzeit eines Vorganges]
zBsp Bewegen des Sekundenzeigers

Ruhendes System Σ: $\Delta t = t_2 - t_1$

Lorentz-Transformation: $$t = \gamma\left[t' + \frac{\beta}{c}x'\right]$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma\left[t_2' + \frac{\beta}{c}x_2'\right] - \gamma\left[t_1' + \frac{\beta}{c}x_1'\right]$$

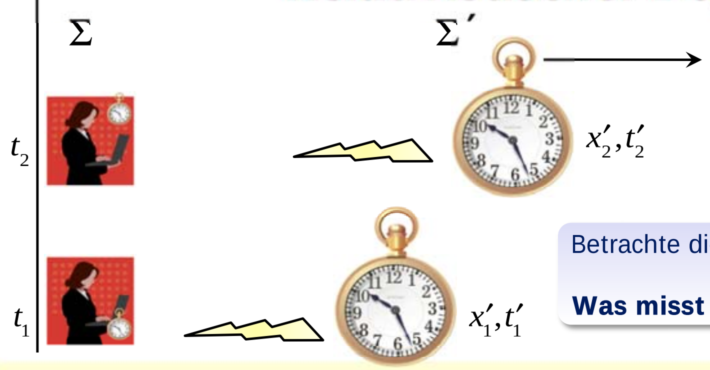
Uhr fest in Σ': $x_2' = x_1'$

$$\Delta t = \gamma t_2' - \gamma t_1' = \gamma \Delta t'$$

$$\Delta t > \Delta t' \quad \text{für} \quad 0 < \upsilon < c$$

Zeitdilatation

Relativistischer Dopplereffekt



Die Uhr entfernt sich von der Physikerin

Betrachte die bewegte Uhr vom ruhenden System Σ aus.

Was misst die Physikerin wirklich?

Zeit in Σ zu welcher die Uhr jeweils ein Photon aussendet: $t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{\beta}{c}x_1'\right) \quad t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{\beta}{c}x_2'\right)$

und somit: $$t_2 - t_1 = \gamma\Big(t_2' - t_1' + \frac{\beta}{c}\underbrace{(x_2' - x_1')}_{0}\Big) = \gamma\left(t_2' - t_1'\right)$$

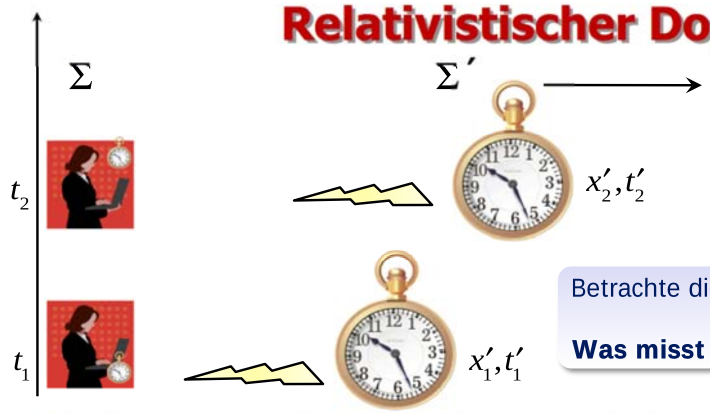
Ort in Σ wo die Uhr jeweils ein Photon aussendet: $x_1 = \gamma\left(x_1' + \beta c t_1'\right) \quad x_2 = \gamma\left(x_2' + \beta c t_2'\right)$

und somit: $$x_2 - x_1 = \gamma\Big(\underbrace{x_2' - x_1'}_{0} + \beta c\left(t_2' - t_1'\right)\Big) = \beta\gamma c(t_2' - t_1')$$

Das Photon kommt aber erst nach einer Laufzeit x_1/c beziehungsweise x_2/c bei der Physikerin an:

$$\Delta t = \left[t_2 + \frac{x_2}{c}\right] - \left[t_1 + \frac{x_1}{c}\right] = \left[t_2 - t_1\right] - \frac{1}{c}\left[x_2 - x_1\right] = \gamma(t_2' - t_1') + \left[\beta\gamma(t_2' - t_1')\right] = \left[1 + \beta\right]\gamma\Delta t'$$

Relativistischer Dopplereffekt



Die Uhr entfernt sich von der Physikerin

Betrachte die bewegte Uhr vom ruhenden System Σ aus.

Was misst die Physikerin wirklich?

Die Zeitdilatation der bewegten Uhr plus die Laufzeit der Photonen, bis diese von der Physikerin gemessen werden können, ergeben zusammen die Zeitintervalle welche die Physikerin misst:

$$\Delta t = [1 \pm \beta]\gamma \Delta t' = \frac{1 \pm \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t' = \sqrt{\frac{(1 \pm \beta)\cdot(1 \pm \beta)}{(1+\beta)\cdot(1-\beta)}}\Delta t' = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}\Delta t'$$

Dies gilt für sich entfernende Uhren genauso wie für sich annähernde.

$+\beta$ sich entfernende Uhr
$-\beta$ näher kommende Uhr

$\Rightarrow \pm$ $\begin{cases} \text{oberes Vorzeichen: sich entfernen} \\ \text{unteres Vorzeichen: sich annähern} \end{cases}$

Rot- und Blau-Verschiebung

Eine direkte Konsequenz des relativistischen Dopplereffekts ist die sogenannte Rot- und Blau-Verschiebung.

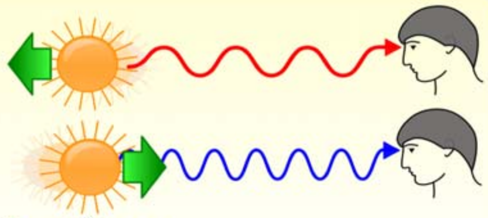
Wenn ein Beobachter eine sich entfernende Lichtquelle beobachtet, sieht er die Wellenzüge des Lichtes mit geringerer Frequenz, also zum roten Ende des Spektrums verschoben.

Umgekehrt sieht er die Wellenzüge mit höherer Frequenz, wenn die Lichtquelle sich annähert, also zum blauen Ende des Spektrums verschoben.

Dies lässt sich berechnen:

Die gemessene Frequenz f von Lichtstrahlen einer bewegten Lichtquelle ist gerade der Kehrwert der Zeitintervalle Δt, mit der Wellenberge beim Beobachter ankommen.

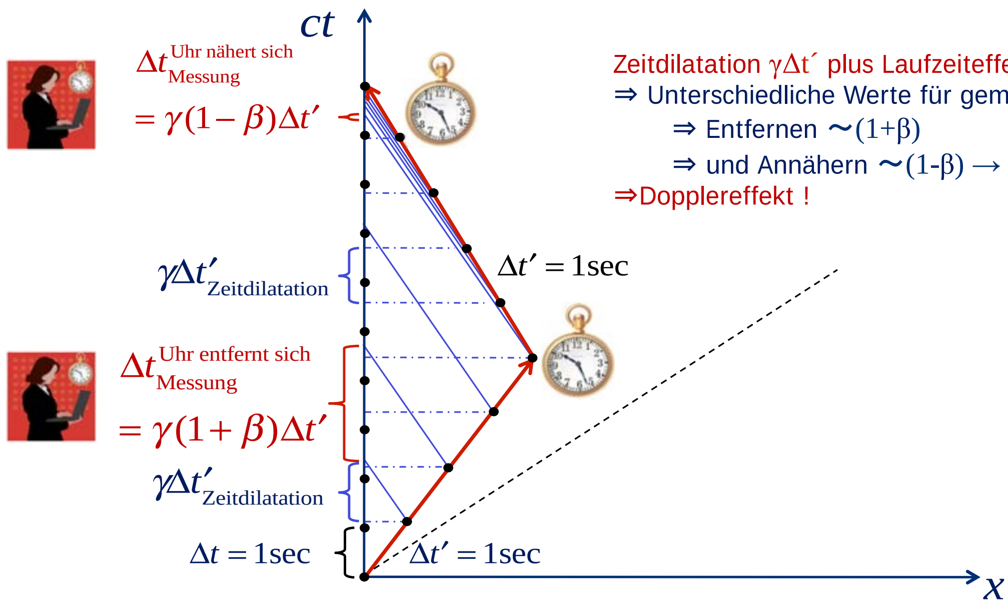
$$\Delta t = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}\Delta t' \qquad \text{mit } f = \frac{1}{\Delta t} \text{ folgt:}$$



$$\Rightarrow \quad f = \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}} f' \qquad \begin{cases} \text{oberes Vorzeichen: sich entfernen} \\ \text{unteres Vorzeichen: sich annähern} \end{cases}$$

Raum-Zeit Diagramm zur sich entfernenden und annähernden Uhr

Minkowski Raum-Zeit Diagramm

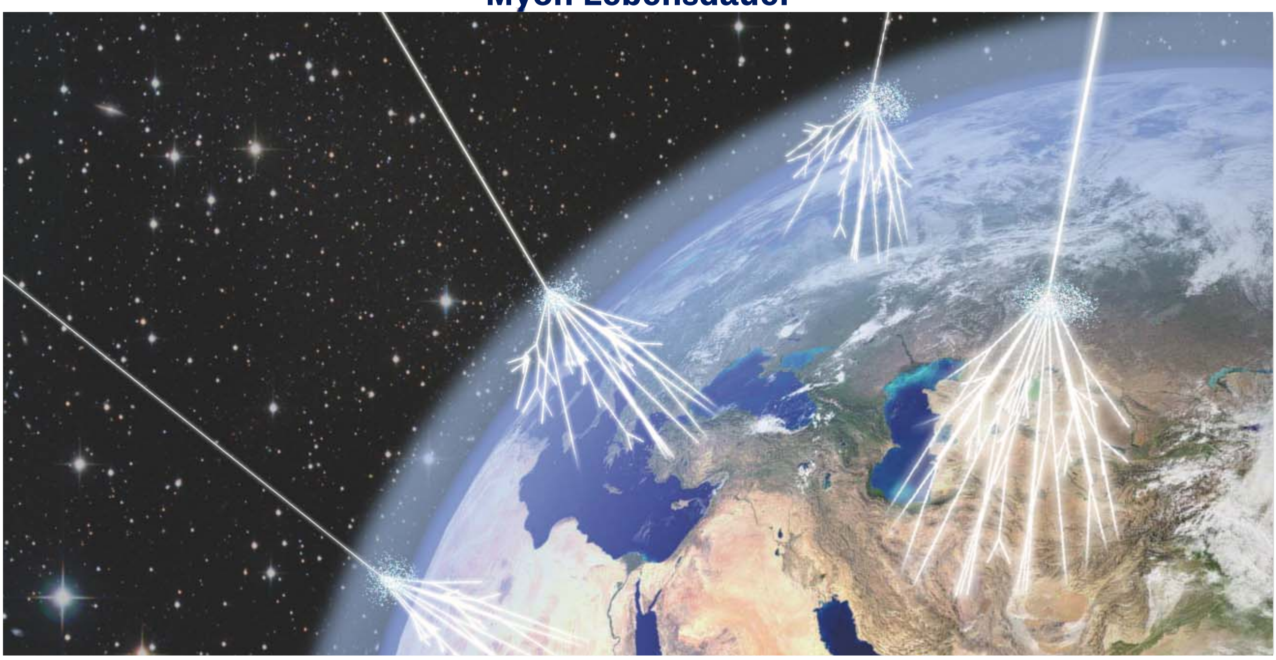


Zeitdilatation $\gamma\Delta t'$ plus Laufzeiteffekte
⇒ Unterschiedliche Werte für gemessenes Δt
⇒ Entfernen $\sim(1+\beta)$
⇒ und Annähern $\sim(1-\beta) \rightarrow \approx 0$ für $\beta \approx 1$
⇒Dopplereffekt !

In diesem Beispiel ist die Uhr nach 9 Sekunden Eigenzeit zurück am Startpunkt bei x=0
Für einen ruhenden Beobachter sind allerdings 10 Sekunden verlaufen.
⇒ Dies ist das Zwillingsparadoxon.

Relativitätstheorie

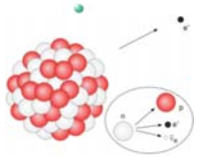
Teilchenphysik
Kosmische Strahlung
Myon Lebensdauer



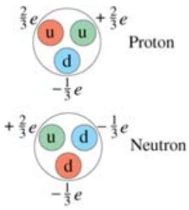
Was sind elementare Teilchen ?

Feuer, Erde, Wasser und Luft sind nicht elementar,
sie bestehen aus Molekülen, die aus Atomen aufgebaut sind.

Atome sind nicht elementar,
sie bestehen aus Elektronen und einem Kern.
Elektronen gehören zur Klasse der Leptonen.



Atomkerne sind nicht elementar,
sie bestehen aus Protonen und Neutronen.

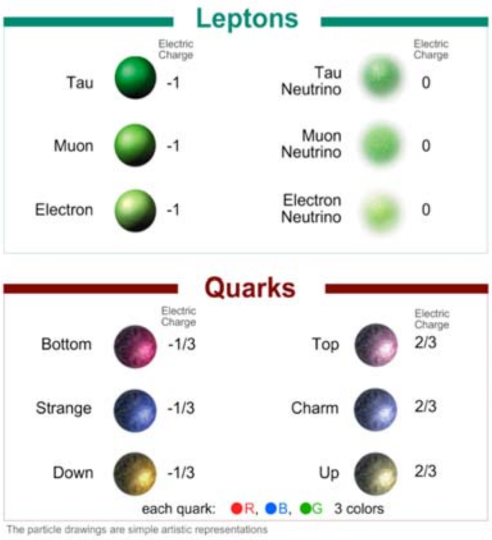


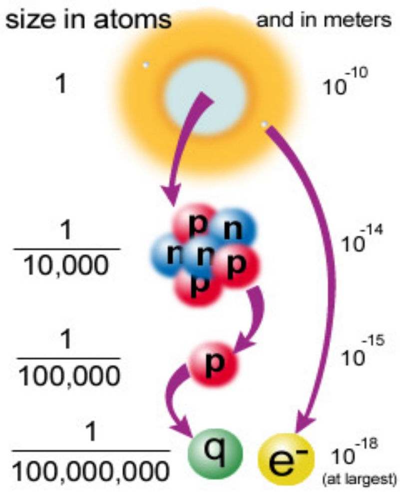
Protonen und Neutronen sind nicht elementar,
sie bestehen aus Quarks: den up-Quarks und den down-Quarks.
Ein up-Quark hat eine elektrische Ladung von +2/3 der Elementarladung e.
Ein down-Quark hat die Ladung -1/3 e.

Quarks und Leptonen sind elementar (nach heutigem Verständnis...)

Diese sind die fundamentalen Bausteine, aus denen alle Materie aufgebaut ist.

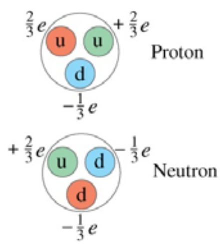
Quarks & Leptonen





Atome bestehen aus **Quarks** und **Leptonen**
Die **Elektronen** der Atomhülle gehören zur Klasse der **Leptonen**.
Atomkerne bestehen aus **Protonen** und **Neutronen**

Protonen bestehen aus **2 Up-Quarks** und **1 Down-Quark**
Neutronen bestehen aus **1 Up-Quark** und **2 Down-Quarks**

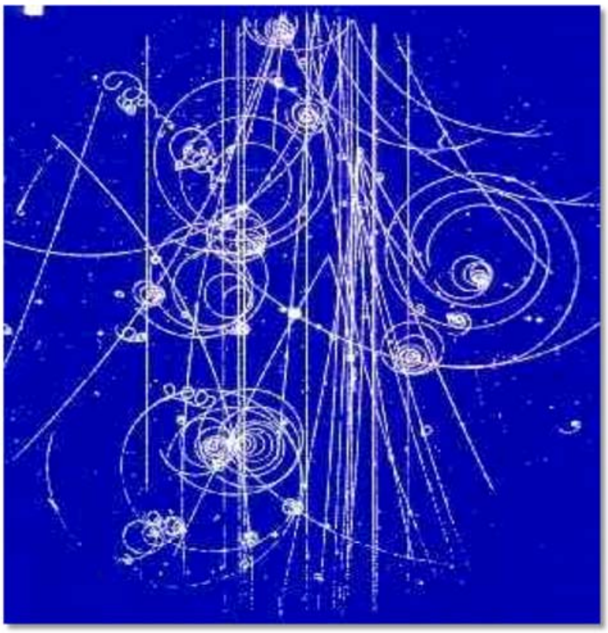


Teilchenphysik

Eigenschaften von Teilchen manifestieren sich in verschiedensten Reaktionen.

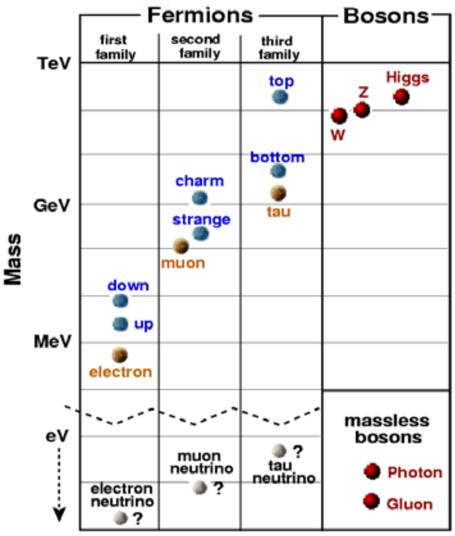
Teilchenphysiker erforschen diese, und erklären so die Struktur der Materie sowie Entstehung und Aufbau des Universums (Big Bang).

Teilchen verhalten sich fast immer hoch relativistisch, und liefern so eine experimentelle Plattform zur Bestätigung der Relativitätstheorie.



Mit einer Blasenkammer können die **Spuren geladener Teilchen** sichtbar gemacht werden.
Ein von aussen angelegtes Magnetfeld bewirkt, dass sich die Teilchen auf gekrümmten Bahnen bewegen.

Was sind Myonen ?



Elementarteilchen kommen in drei Familien vor.

Jede Familie ist "schwerer" als ihre vorhergehende – ansonsten entsprechen sich die Teilchen jeder Familie. Bis auf ihre Masse haben sie identische Eigenschaften.

Elementarteilchen der schwereren Familien sind nicht stabil und "zerfallen" rasch.

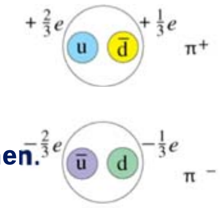
Zu jedem Teilchen gibt es ein Anti-Teilchen.
zBsp. Elektron e^- und Anti-Elektron e^+.
Anti-Elektronen werden auch Positronen genannt.

Kräfte zwischen Elementarteilchen werden durch Bosonen vermittelt.

Das Photon zBsp vermittelt elektromagnetische Wechselwirkungen.

Das Myon ist das "Elektron" der zweiten Familie
Ein Myon ist etwa 200 mal so schwer wie ein Elektron: $m_{\text{Myon}} \approx 200 \times m_{\text{Elektron}}$
Myonen zerfallen mit einer "Lebensdauer" von 2.2 µs

Pionen: π^+ und π^-



Teilchen, welche aus einem **Quark** und einem **Anti-Quark** bestehen, heissen **Mesonen.** Mehr als 100 Mesonen sind bekannt und sind detailliert vermessen worden.

Pionen π^+ gehören zu den Mesonen und bestehen aus einem **up-Quark** und einem **Anti-down-Quark.** **Anti-Pionen** π^- bestehen entsprechend aus einem **Anti-up-Quark** und **down-Quark**.

Antiteilchen werden entweder durch ihre Ladung oder mit einem Querstrich gekennzeichnet.
Anti-up-Quark: ū   Anti-Proton: $\overline{p}$

Pionen sind nicht stabil, sie zerfallen mit einer mittleren Lebensdauer von

$$\tau_\pi = \mathbf{2.6 \times 10^{-8}\ Sekunden} = \mathbf{0.026\ \mu s}$$

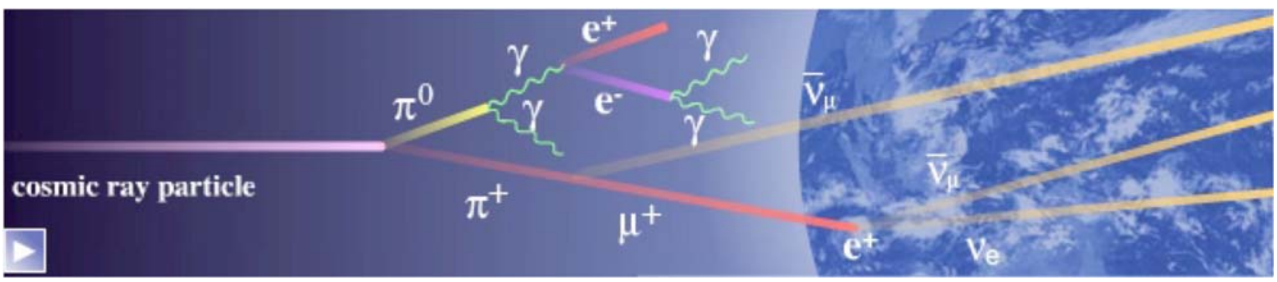
in ein Myon und ein Myon-Neutrino.

$$\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu_\mu$$

Die Wegstrecke, die ein Pion das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt durchläuft, ist kurz:

$$c\tau_\pi = \mathbf{7.8\ m}$$

Kosmische Strahlen

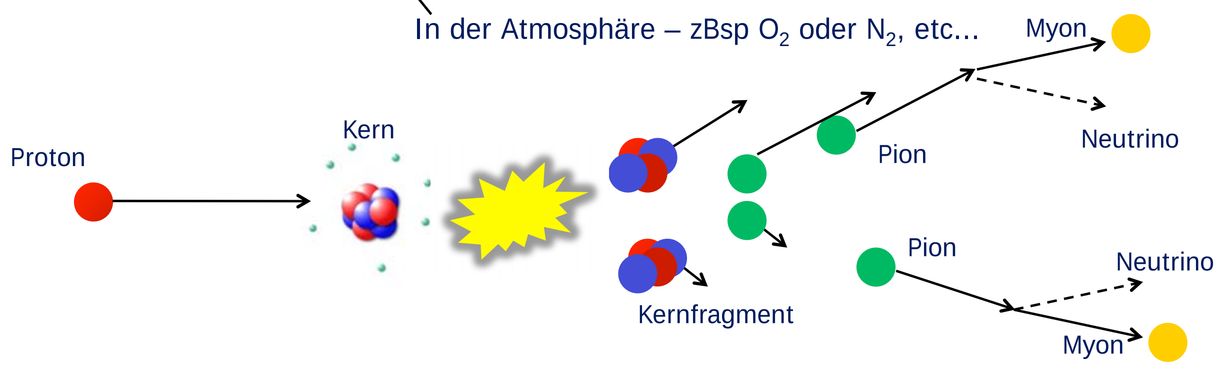


Kosmische Strahlung und Erzeugung von Myonen

Kosmische Strahlung, die in der Erdatmosphäre Teilchenreaktionen auslöst, besteht vor allem aus **Protonen**, (leichten) Atomkernen und Photonen, welche weite Strecken durch das Universum durchlaufen haben. Keine kurzlebigen Teilchen können die Erde erreichen!
Pionen entstehen wenn hochenergetischen Protonen, welche durch das Universum rasen, mit Atomkernen in Molekülen der Erdatmosphäre kollidieren.
Myonen, die auf der Erdoberfläche ankommen, entstehen, wenn diese Pionen in der hohen Atmosphäre zerfallen.

Proton + Kern → Kernfragmente + Pionen

In der Atmosphäre – zBsp O_2 oder N_2, etc...



Protonen und Kerne bestehen aus Quarks, da Pionen auch aus Quarks bestehen, entstehen bei solchen Kollisionen immer auch viele Pionen.

Myon- Zerfall

$\mu^{\pm}$

Myonen haben (soweit wir wissen) keine innere Struktur.
Sie gehören zu den **Leptonen.**

Man kennt genau **drei geladene Leptonen: Elektron $e^{\pm}$, Myon $\mu^{\pm}$ und das Tau $\tau^{\pm}$** sowie **drei neutrale Leptonen: Elektron-Neutrino ν_e, Myon-Neutrino ν_μ und das Tau-neutrino ν_τ**.

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu_e + \nu_\mu$$

Zerfall einen geladene Myons in ein Elektron und zwei Neutrinos.

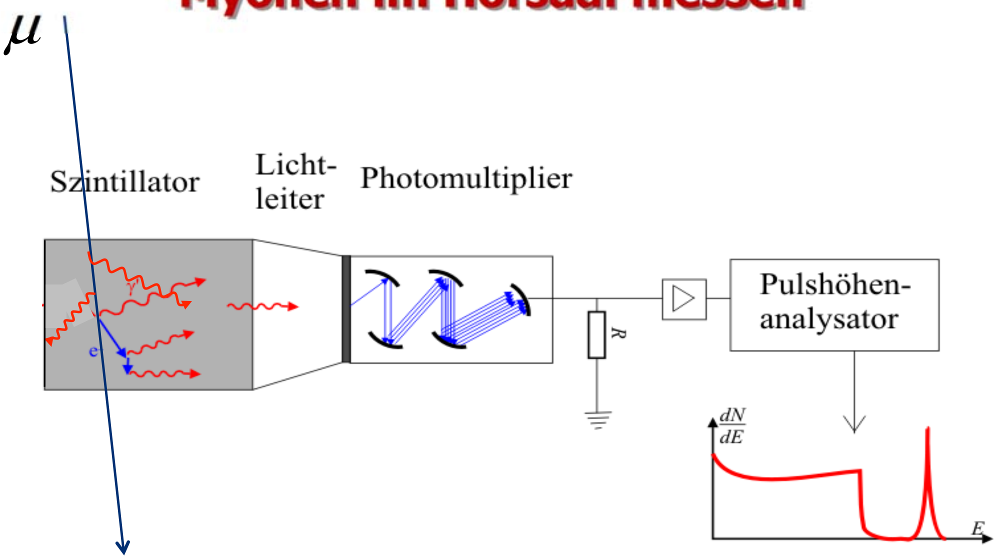
Die Myon Lebensdauer beträgt $\tau_\mu = 2.2\times10^{-6}$ **Sekunden** = **2.2 μs**

Die Wegstrecke die ein Myon durchlaufen kann ist dementsprechend: $c\tau_\mu = 659$ **m**

Unmöglich für Myonen die Erdoberfläche zu erreichen?

Myonen erreichen trotzdem die Erdoberfläche,
da sie wegen ihrer hohen Geschwindigkeit eine längere Lebensdauer haben!
Zeitdilatation
$\gamma c \tau_\mu = \gamma \cdot 659\ \mathrm{m} = 10 - 20\ \mathrm{km}$ **um die Erdatmosphäre zu durchqueren!**
d.h. $\gamma \approx 15 - 30$ **(γ =20 ist ein typischer Wert für kosmische Myonen dies entspricht β=0.9987 d.h. υ=0.9987 c)**

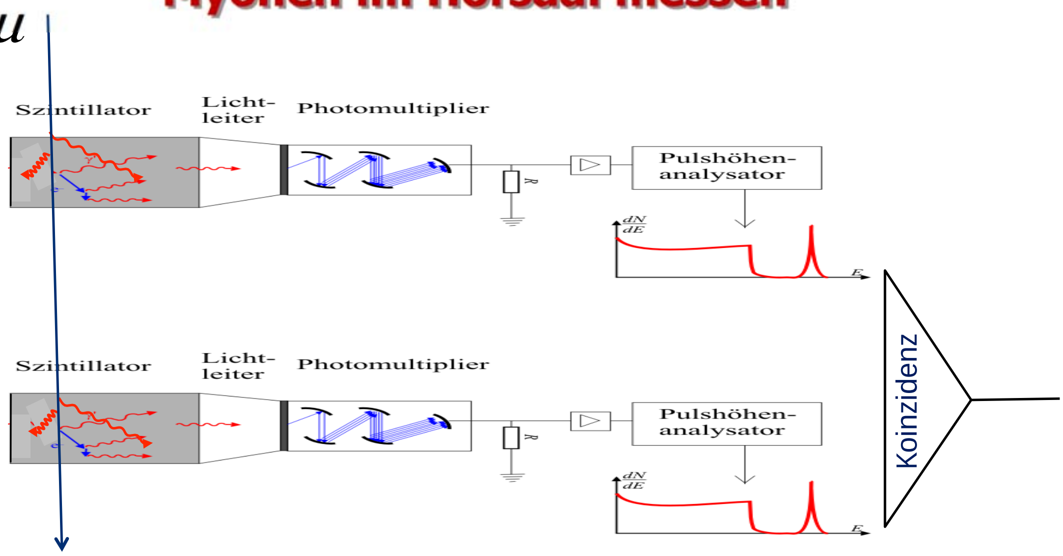
Myonen im Hörsaal messen



Ein **Myon ionisiert Atome** in einem **durchsichtigen Szintillator** (Plastik)
Dabei entstehen Photonen, welche mittels Lichtleiter auf einen Photomultiplier (Lichtverstärker) geleitet werden. Dort werden die **Lichtimpulse in elektrische Signale umgewandelt**.

Umgebungslicht, wird dabei auch verstärkt → Rauschen!
Der Szintillator wird deshalb mit schwarzer Folie zugeklebt.

Myonen im Hörsaal messen

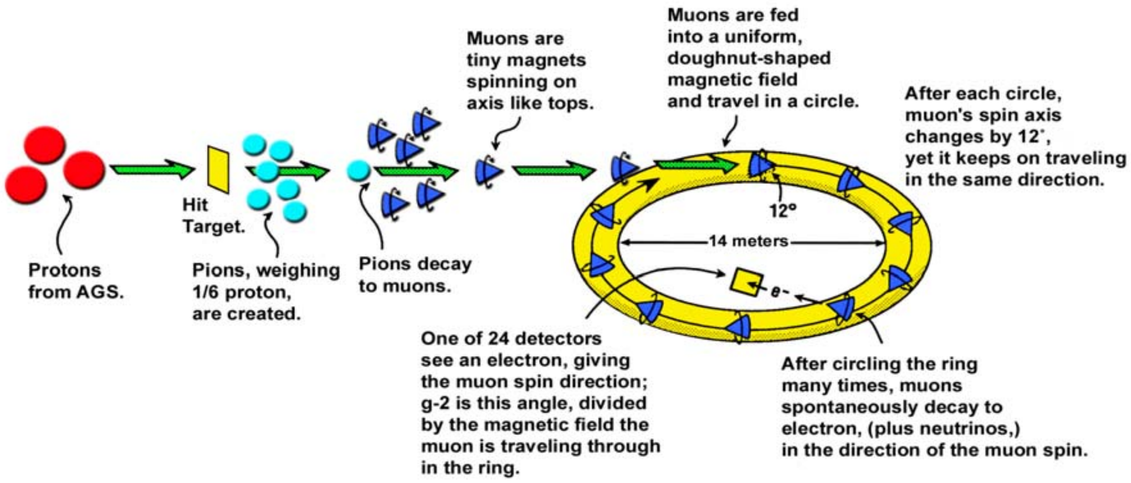


Myonen Teleskop

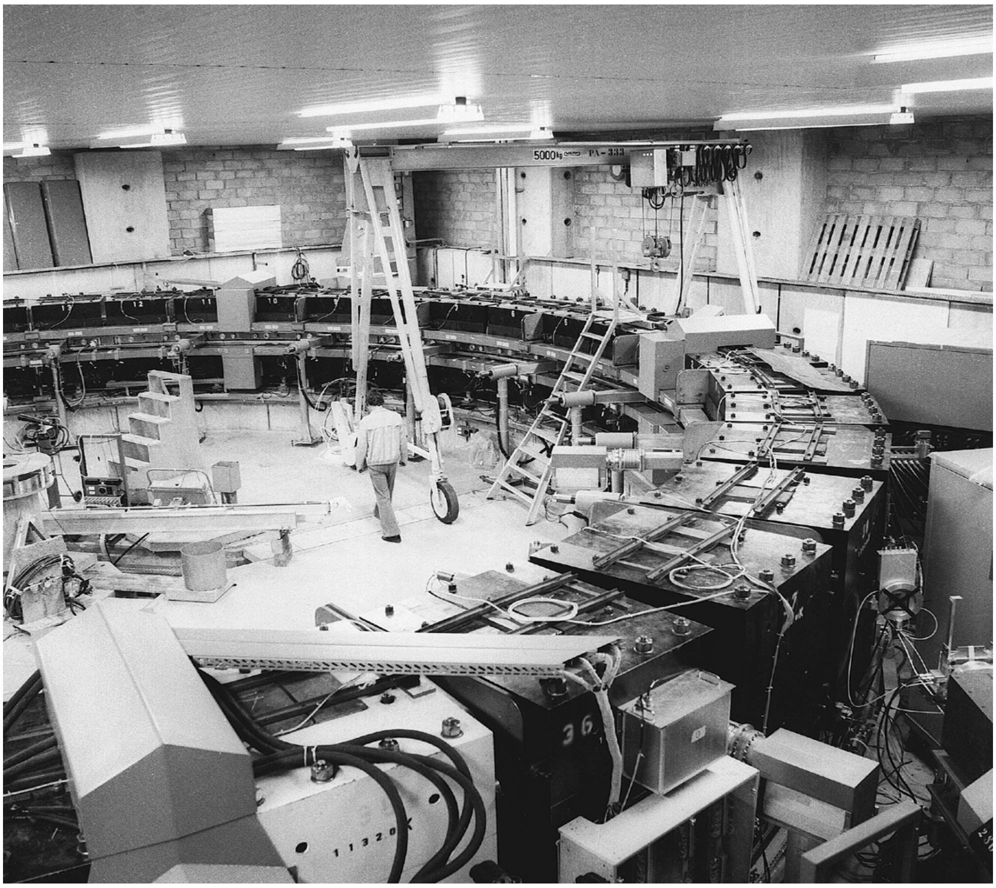
Das durch Restlicht verursachte Rauschen kann stark unterdrückt werden, wenn zwei Szintillatoren zu einem Teleskop kombiniert werden. Wenn ein Myon durch dieses Teleskop fliegt erkennen beide Szintillatoren **gleichzeitig** ein Signal.

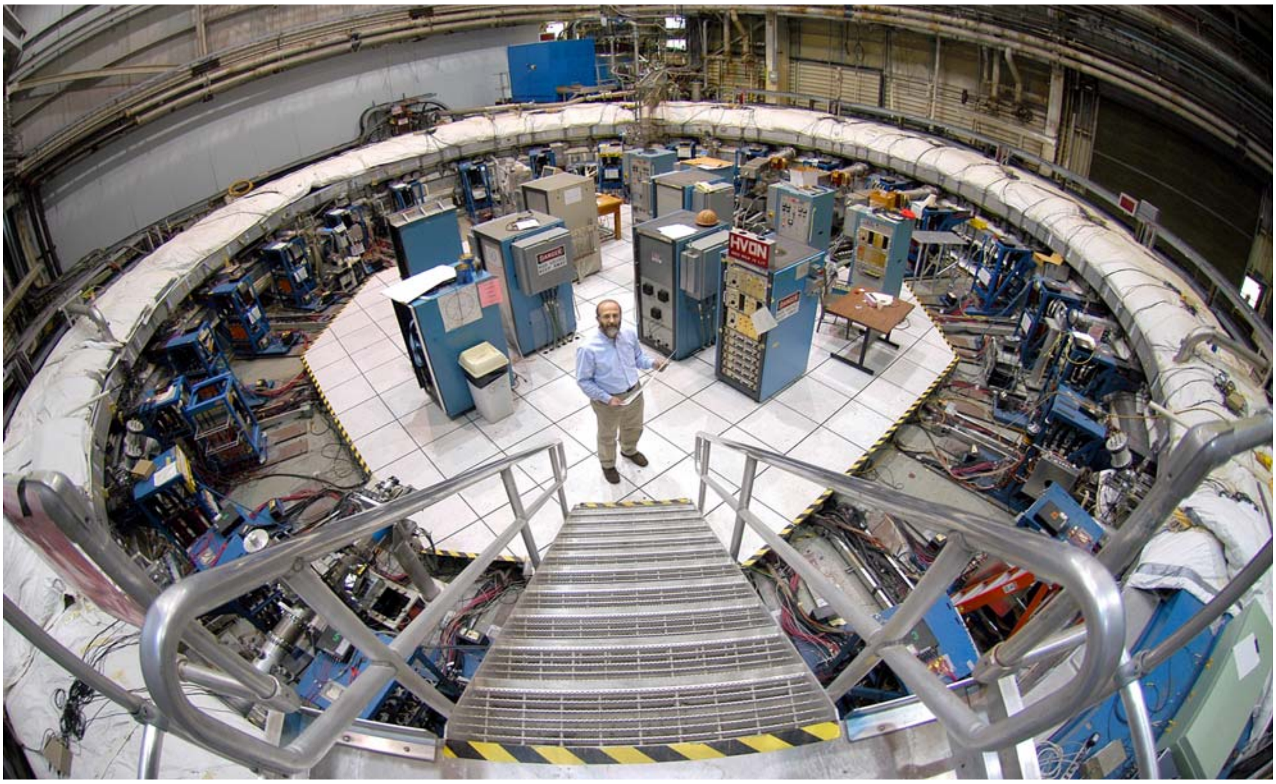
Jeder Szintillator misst auch Umgebungslicht – aber hier sind keine Koinzidenzen zu erwarten.

Myonen im Labor herstellen



CERN 1974



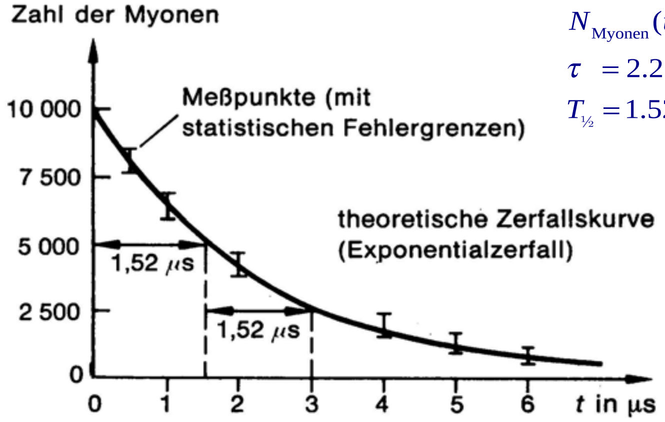


BNL 1997-2004
Brookhaven National Laboratory, Upton, Long Island, NY

Messen der Myon Lebensdauer

Langsame Myonen können in einem **Teilchendetektor** vollständig zum Stillstand kommen. Nach einiger Zeit zerfällt das Myon dem **Zerfallsgesetz** entsprechend, und ein Elektron (oder Positron, entsprechend der Ladung des Myons) entsteht. Die Zeitdifferenz zwischen dem Signal des Myons und dem Signal des Elektrons entspricht der individuellen Lebensdauer des Myons. Werden viele Myonen gemessen, kann so die **mittlere Lebensdauer** ermittelt werden.

$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ $\qquad N_{\text{Myonen}}(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

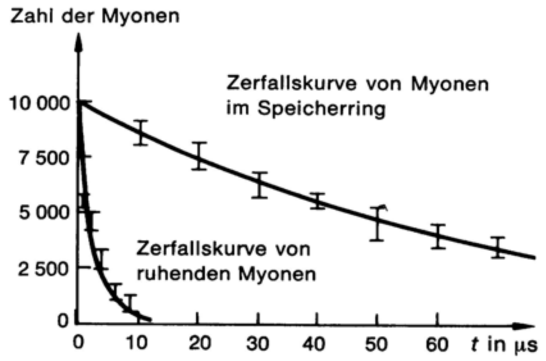


N_0	Anzahl Myonen zur Zeit $t = 0$
$N_{\text{Myonen}}(t)$	Anzahl Myonen nach einer Zeit t
$\tau = 2.2\ \mu s$	mittlere Lebensdauer
$T_{½} = 1.52\ \mu s$	Halbwertszeit

Wobei gilt:

$$T_{½} = \ln 2 \cdot \tau$$
$$= \ln 2 \cdot 2.2\ \mu s = 0.693... \cdot 2.2\ \mu s$$
$$\approx 1.52\ \mu s$$

Relativistische Myonen in einem Speicherring



Im Speicherring schnell kreisende Myonen [β=0.9994 c] zerfallen viel langsamer als ruhende!

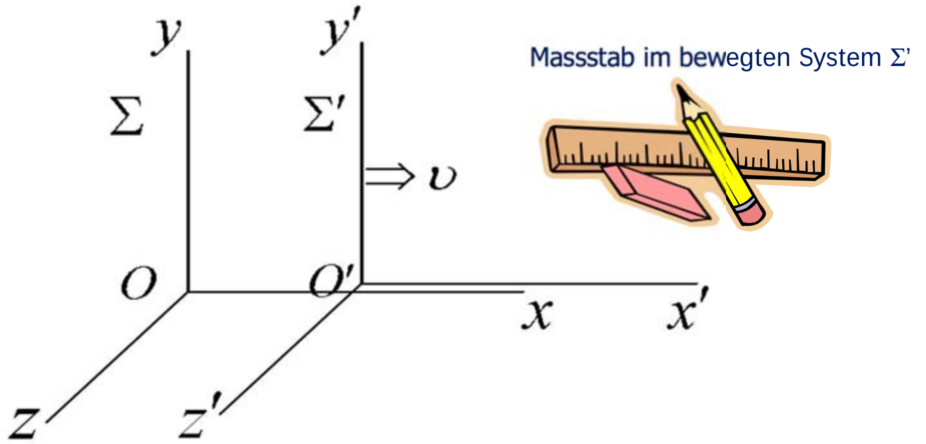
Die **Zeitdilatation** kann so in einem Speicherring direkt gemessen werden!

$$\tau_\mu(\upsilon) = \gamma \cdot \tau_\mu^0 \qquad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-[0.9994]^2}} \simeq 29$$

$$\simeq 29 \cdot 2.2\mu s$$

$$\simeq 64\mu s$$

Längenkontraktion



Längenmessung eines in Σ´ ruhenden Massstabs, der parallel zu x und x´ ausgerichtet ist.

Längenkontraktion

Bewegtes System Σ': $\ell' \equiv \Delta x' = x_2' - x_1'$ [Länge des Massstabs im mitbewegten System]

Ruhendes System Σ: $\ell \equiv \Delta x = x_2 - x_1$ [Länge des selben Massstabs vom ruhenden System aus gemessen]

Lorentz-Rücktransformation: $x' = \gamma\left[x - \upsilon t\right]$

$$\Rightarrow \ell' = x_2' - x_1' = \gamma\left[x_2 - \upsilon t_2\right] - \gamma\left[x_1 - \upsilon t_1\right]$$

Gleichzeitiges Messen der beiden Enden des bewegten Massstabs: $t_2 = t_1$

$$\ell' = \gamma\left[x_2 - x_1\right] = \gamma \ell$$

$$\ell = \gamma^{-1}\ell' = \sqrt{1-\beta^2}\,\ell'$$

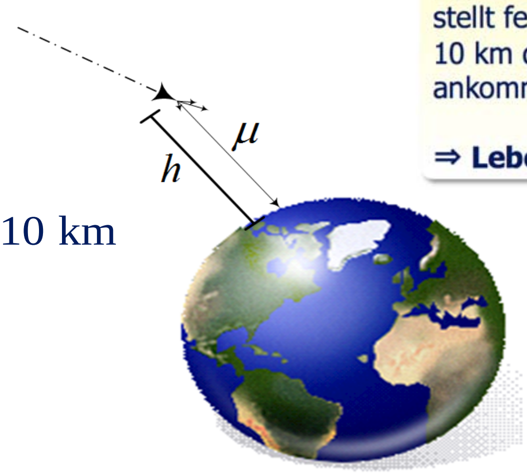
$\ell < \ell'$ ⇒ **Längenkontraktion (Lorentzkontraktion)**
Ein sich bewegender Massstab erscheint vom Ruhesystem aus gemessen verkürzt.

205

Beispiel: Kosmische Myonen

Ein auf der Erde stehender Beobachter stellt fest, dass Myonen eine Wegstrecke von ca. 10 km durchlaufen und auf der Erd-oberfläche ankommen. Er schliesst daraus:

⇒ **Lebensdauer des Myons verlängert**



$h \approx 10$ km

$$\tau_\mu(\upsilon_\mu) = \gamma \cdot \tau_\mu$$
$$= \gamma \cdot 2.2\ \mu\text{s}$$

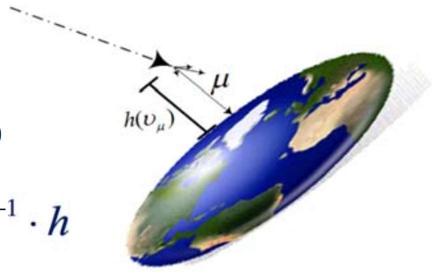
Typischer Wert für $\gamma \approx 20$
Distanz D bevor das μ zerfällt:

$$D = \gamma \cdot c \cdot 2.2\ \mu\text{s}$$
$$= \gamma \cdot 299792458\ \text{m/s} \cdot 2.2\ \mu\text{s}$$
$$= \gamma \cdot 658.6\ \text{m}$$
$$\approx 13\ \text{km}$$

Schnelle Myonen haben tatsächliche gute Chancen die Erdoberfläche zu erreichen!

206

Beispiel: Kosmische Myonen



Ein mit dem Myon mitfliegender Beobachter stellt fest, dass sich die Erde mit hoher Geschwindigkeit auf ihn zu bewegt. Die Lebensdauer des Myons ist für ihn 2.2 μs.

⇒ **Erde und Flugweg erscheinen dem Myon verkürzt (Längenkontraktion)**

Typischer Wert für $\gamma \approx 20$

$$h(\upsilon_\mu) = \gamma^{-1} \cdot h$$
$$\approx \frac{1}{20} \cdot 10 \text{ km}$$
$$\approx 500 \text{ m}$$

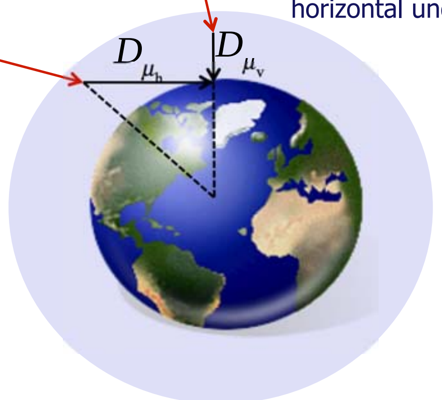
$$\tau_\mu = 2.2\ \mu\text{s}$$
$$h(\upsilon_\mu) = \gamma^{-1} \cdot h$$

Distanz D bevor das μ zerfällt:

$$D = c \cdot 2.2\ \mu\text{s}$$
$$= 299792458 \text{ m/s} \cdot 2.2\ \mu\text{s}$$
$$= 658.6 \text{ m}$$

Myonen haben von beiden Systemen aus gesehen die **exakt gleich guten Chancen** die Erdoberfläche zu erreichen!

Wieso kommen die meisten Myonen von oben?



Myonen entstehen in ca. 10 km Höhe wenn kosmische Protonen (oder auch ganze Atomkerne) mit Molekülen der Atmosphäre kollidieren.

Die Flugdistanz bis diese Myonen den Erdboden erreichen lässt sich horizontal und vertikal einfallende Myonen berechen.

$$R_{Erde} = 6370 \text{ km} \qquad D_{\mu_v} \approx 10 \text{ km}$$

$$D_{\mu_h} = \sqrt{\left(R_{Erde} + D_{\mu_v}\right)^2 - R_{Erde}^2}$$
$$= \sqrt{2 R_{Erde} D_{\mu_v} + D_{\mu_v}^2}$$
$$\approx 113 \text{ km}$$

Myonen sind nicht stabil → Ein Myon zerfällt in ein Elektron und zwei Neutrinos
Ein Myon fliegt **ca. 13 km** durch die Atmosphäre bevor es **zerfällt**.
Horizontal fliegende Myonen haben kaum eine Chance die Erdoberfläche zu erreichen.

Nicht alle kosmischen Protonen haben dieselbe Energie, nicht alle entstehen exakt in der selben Höhe, einige Myonen leben auch wesentlich länger als 2.2μs bevor sie zerfallen (Exponentialgesetz).
⇒ Es gibt trotzdem einige Myonen welche horizontal die Erdoberfläche erreichen.

Relativitätstheorie

Relativistische Kinematik

Relativistischer Impuls

$$\vec{p}_{\text{klassisch}} = m \cdot \vec{\upsilon} \qquad \Rightarrow \vec{p}_{\text{relativistisch}} = ?$$

Relativistische Kraft

$$\vec{F}_{\text{klassisch}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a} \qquad \Rightarrow \vec{F}_{\text{relativistisch}} = ?$$

Relativistische Energie

$$E_{\text{kin, klassisch}} = \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{m}{2} \cdot \upsilon^2 \qquad \Rightarrow E_{\text{kin, relativistisch}} = ?$$

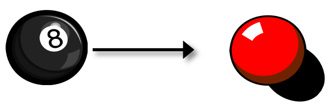
Relativistischer Impuls

In der klassischen Physik ist der Impuls $p_{\text{klassisch}}$ eine Erhaltungsgrösse:

$$\vec{p}_{\text{klassisch}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{\upsilon}_i = \text{konst}$$

Wobei sich die Summe über alle Massenpunkte i der Masse m_i mit Geschwindigkeit υ_i in einem System erstreckt.

Z.B. Von jedem Inertialsystem aus betrachtet gilt:
Der Impuls zweier Billiard Kugeln vor ihrer Kollision ist gleich dem Impuls dieser beiden Billiard Kugel nach der Kollision.



$p_{\text{klassisch}}$ ist allerdings nur dann eine Erhaltungsgrösse, wenn die involvierten Geschwindigkeiten relativ klein sind, d.h. wenn $\upsilon \ll c$.

Es soll nun neu der relativistische Impuls $p_{\text{relativistisch}}$ so definiert werden, dass dieser eine Erhaltungsgrösse bei allen Geschwindigkeiten $0 \le \upsilon \le c$ liefert.

Bei kleinen Geschwindigkeiten soll die klassische Physik gelten:
d.h. $p_{\text{relativistisch}} \approx p_{\text{klassisch}} = m\upsilon$ für $\beta = \upsilon/c \ll 1$

Relativistischer Impuls

Vorher:  **Nachher:** 

Der relativistische Impuls ist in jedem Inertialsystem eine Erhaltungsgrösse:

$$\vec{p}_{\text{Vorher}} = \vec{p}_{\text{Nachher}} \quad \text{und} \quad \vec{p}'_{\text{Vorher}} = \vec{p}'_{\text{Nachher}} \quad \text{für } \Sigma \text{ und alle } \Sigma'$$

Allerdings:
Der Impuls transformiert sich, wenn man vom ruhenden ins bewegte Inertialsystem transformiert!
Dies ist auch in der klassischen Physik schon so und relativistisch gilt dies erst recht!

$$\vec{p} \neq \vec{p}'$$

Relativistischer Impuls

Es lässt sich zeigen, dass folgende Definition des relativistischen Impulses in allen Inertialsystemen und von allen Inertialsystemen aus gesehen, eine Erhaltungsgrösse ist:

$$\vec{p}_{\text{relativistisch}} \equiv \gamma m \vec{v}$$

mit: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\vec{v}}{c}\right)^2}}$ und $\vec{v} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$

Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ gilt $\gamma \approx 1$ und somit sind so der relativistische und der klassischer Impuls beide gute Erhaltungsgrössen, wobei strenggenommen nur der relativistische Impuls wirklich erhalten ist.

Der klassische Impuls ist bei kleinen Geschwindigkeiten in guter Näherung eine Erhaltungsgrösse.

Relativistische Kraft

Wirkt eine äussere Kraft auf einen Körper der Masse m, ändert dieser seinen Impuls:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \overset{\text{klassisch}}{=} \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \overset{\text{relativistisch}}{=} \frac{d(\gamma m\vec{\upsilon})}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\left(\frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}}{c^2}\right)}}\right)$$

$$= \frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{m\vec{\upsilon}(\vec{\upsilon}\cdot\vec{a})}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

$$= \gamma m\vec{a} + \gamma^3\frac{(\vec{\upsilon}\cdot\vec{a})}{c^2}m\vec{\upsilon}$$

Relativistische Kraft

Die zeitliche Änderung des relativistischen Impuls ergibt die relativistische Kraft. Diese enthält allerdings einen Term, bei dem die Richtung in die die Kraft wirkt und die Beschleunigungsrichtung nicht mehr in jedem Fall parallel sind.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \overset{\text{relativistisch}}{=} \underbrace{\gamma m\vec{a}}_{\text{vergleiche mit } m\vec{a}} + \underbrace{\gamma^3\frac{(\vec{\upsilon}\cdot\vec{a})}{c^2}m\vec{\upsilon}}_{\substack{\text{neuer Term } \parallel \vec{\upsilon}\text{:} \\ \text{Kraft i.A. nicht parallel} \\ \text{zur Beschleunigung}}}$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten $\upsilon \ll c$ ist $\gamma \approx 1$
und somit ist die klassische Newton'sche Beziehung $\vec{F} = m\vec{a}$
als Grenzfall der allgemein gültigen relativistischen Kraft zu verstehen.

Kinetische Energie

Die Energie die nötig ist eine ruhende Masse m auf eine Geschwindigkeit υ zu beschleunigen ist definitionsgemäss die kinetische Energie E_{kin}. Diese wollen wir als Funktion von Impuls p und Geschwindigkeit υ besimmen:

$$\boxed{E_{\text{kin}} = \int_{x_0}^{x_1} F\,dx} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dp}{dt}\,dx = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dp}{dt}\underbrace{\upsilon dt}_{dx} = \boxed{\int_{p_0}^{p_1} \upsilon\,dp}$$

verwenden von: $d(p\upsilon) = \upsilon dp + p d\upsilon$

$$E_{kin} = \int_{p_0\upsilon_0}^{p_1\upsilon_1} d(p\upsilon) - \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_1} p\,d\upsilon$$

$$= p_1\upsilon_1 - p_0\upsilon_0 - \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_1} p\,d\upsilon$$

verwenden von $\upsilon_0 = 0$ und $\upsilon_1 = \upsilon$ ergibt so für die kinetische Energie:

$$\boxed{E_{\text{kin}} = p\upsilon - \int_0^{\upsilon} p\,d\upsilon}$$

Kinetische Energie: Klassisch & Relativistisch

Mit $E_{\text{kin}} = p\upsilon - \int_0^{\upsilon} p\,d\upsilon$ können wir die kinetische Energie einer bewegten Masse sowohl klassisch wie auch relativistisch berechnen:

einsetzen von: $p^{\text{klassisch}} = m\upsilon$

$$E_{\text{kin}} = m\upsilon^2 - \int_0^{\upsilon} m\upsilon\,d\upsilon$$

$$= m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2\Big|_{\upsilon=0}^{\upsilon}$$

$$= m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

einsetzen von: $p^{\text{relativistisch}} = \gamma m\upsilon$

$$E_{\text{kin}} = \gamma m\upsilon^2 - \int_0^{\upsilon} \gamma m\upsilon\,d\upsilon$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} m\upsilon^2 + mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\Bigg|_{\upsilon=0}^{\upsilon}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} m\upsilon^2 + mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} - mc^2$$

$$= m\frac{\cancel{\upsilon^2} + c^2\left(1 - \cancel{\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - mc^2$$

Klassisch $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ $\qquad$ $E_{\text{kin}} = \gamma mc^2 - mc^2$ **Relativistisch**

Relativistische Energie

$$E_{\text{kin}} = \underbrace{\gamma mc^2}_{\substack{\text{geschwindigkeits-}\\ \text{abhängiger Term}}} - \underbrace{mc^2}_{\substack{\text{konstanter Term}\\ \equiv E_0}}$$

Der konstante Term mc^2 wird als Ruheenergie E_0 einer Masse m interpretiert.

Ruheenergie E_0

$$\boxed{E_0 = mc^2}$$

Die totale Energie E ist die Summe aus kinetischer Energie E_{kin} und Ruheenergie E_0

$$E = E_{\text{kin}} + E_0$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \gamma mc^2}$$

Relativistische Energie

Damit haben wir zusätzlich zur kinetischen Energie auch noch die neuen Begriffe der Ruheenergie und der totalen Energie eingeführt.

Totale Energie	$E = \gamma mc^2$
Ruheenergie	$E_0 = mc^2$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = (\gamma - 1) mc^2$

Die totale Energie E, summiert über alle Objekte in einem abgeschlossenen Inertial-System, ist eine Erhaltungsgrösse.

E_{kin} oder E_0 sind einzeln genommen keine Erhaltunsgrössen.

Insbesondere kann Ruheenergie (d.h. Masse!) in kinetische Energie umgewandelt werden, und umgekehrt.

Dies spielt bei Materie- Antimaterie Annihilation, beim Zerfall von Teilchen, bei radioaktiven Zerfällen, sowie bei Teilchenkollisionen eine wichtige Rolle.

Kinetische Energie im Grenzfall für kleine Geschwindigkeit

Bei kleinen Geschwindigkeiten sind die relativistische und die klassische kinetische Energie beide gültig. Dies lässt sich leicht sehen, wenn man die Taylorentwicklung von E_{kin} betrachtet:

$$\boxed{E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)mc^2}$$

$$= \left[\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]mc^2$$

$$\overset{\text{Taylor}}{\approx} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \ldots\right) - 1\right]mc^2$$

$$\approx \left[\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right]mc^2 \quad \boxed{\approx \frac{1}{2}m\upsilon^2}$$

Die klassische Formel gilt als Näherung bei kleinen Geschwindigkeiten.

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$ Aus Formeln und Tafeln – Taylor-Reihe

Lorentz-Transformation von Energie und Impuls

Energie und Impuls eines Massenpunktes transformieren sich, wenn man von einem System Σ' in ein anderes System Σ wechselt. Die Energie- Impulstransformation verhält sich analog zur Lorentz-Transformation von Zeit- und Ortskoordinaten:

$$ct = \gamma\left[ct' + \beta x'\right] \quad \rightarrow \quad \frac{E}{c} = \gamma\left[\frac{E'}{c} + \beta p'_x\right]$$

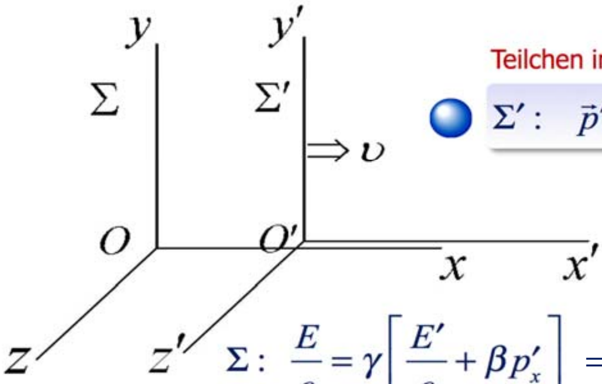
$$x = \gamma\left[x' + \beta ct'\right] \quad \rightarrow \quad p_x = \gamma\left[p'_x + \beta\frac{E'}{c}\right]$$

$$y = y' \quad \rightarrow \quad p_y = p'_y$$

$$z = z' \quad \rightarrow \quad p_z = p'_z$$

Der 4-dimensionale Raum-Zeit Vektor (ct, x, y, z) transformiert sich genau gleich wie der 4-dimensionale Energie-Impuls Vektor $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ unter der Lorentz-Transformation.

Impuls und Energie in Σ und Σ´



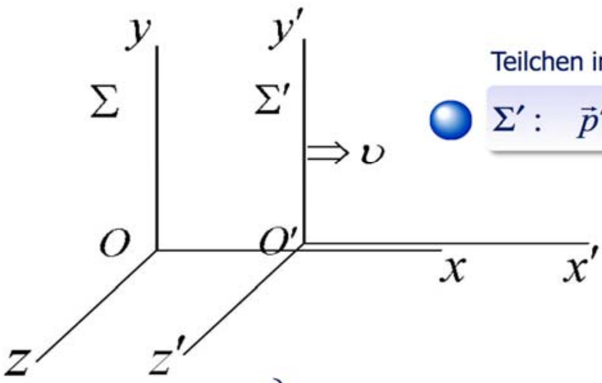
Teilchen in Σ´ in Ruhe

$\Sigma':\quad \vec{p}' = \vec{0} \qquad E' = mc^2$

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma:\quad \frac{E}{c} &= \gamma\left[\frac{E'}{c} + \beta p'_x\right] = \gamma\frac{E'}{c} = \gamma mc \\
p_x &= \gamma\left[p'_x + \beta\frac{E'}{c}\right] = \gamma\beta\frac{E'}{c} = \gamma\beta mc \\
p_y &= p'_y = 0 \\
p_z &= p'_z = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ \vec{p} &= \gamma m\vec{\upsilon} \end{aligned}}$$

Energie und Impuls des selben Teilchens von Σ aus gesehen:

Impuls und Energie in Σ und Σ´



Teilchen in Σ´ in Ruhe

$\Sigma':\quad \vec{p}' = \vec{0} \qquad E' = mc^2$

$$\Sigma:\quad \left.\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ \vec{p} &= \gamma m\vec{\upsilon} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E^2 - \vec{p}^2c^2 = \gamma^2m^2c^4 - \gamma^2m^2\upsilon^2c^2 = m^2c^4\cdot\underbrace{\gamma^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}_{1}$$

$$E^2 - \vec{p}^2c^2 = m^2c^4 = E'^2 - \vec{p}'^2c^2$$

Relativistische Energie-Impulsbeziehung

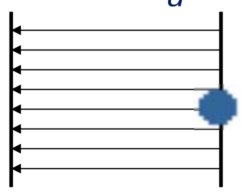
E^2-p^2c^2 ist eine Lorentz-Invariante Erhaltungsgrösse (→ Lorentz-Skalar).
Alle Beobachter in allen Inertialsystemen "messen" denselben Wert m^2c^4.

Kinetische Energie einer Ladung e

- **Eine Ladung e wird beschleunigt, wenn diese einem elektrischen Feld E ausgesetzt wird.**

- **zBsp Plattenkondensator**

$\vec{E}$-Feld $\quad \vec{E} = \frac{V}{d} \cdot \vec{e}_E$



Anode - V = 1 Volt + Kathode

d= Distanz von Anode zu Kathode

Die Ladung erfährt eine Kraft proportional zur Feldstärke $\vec{E}$ und der Ladung e

$$\vec{F} = e\vec{E} = e\frac{V}{d} \cdot \vec{e}_E$$

wobei $\vec{e}_E$ ein Einheitsvektor in Feldrichtung $\vec{E}$ sei.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad eV &= Fd = E_{kin} \\ &= \frac{1}{2}m\upsilon^2 \qquad (klassisch) \\ &= (\gamma - 1)mc^2 \quad (relativistsch) \end{aligned}$$

Elektronenvolt [eV]

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad eV &= Fd = E_{kin} \\ &= \frac{1}{2}m\upsilon^2 \qquad (klassisch) \\ &= \left(\gamma - 1\right)mc^2 \quad (relativistisch) \end{aligned}$$

Das Produkt von Ladung × Spannung, ergibt offensichtlich gerade die kinetische Energie die ein Teilchen der Ladung e gewinnt, wenn es eine Spannung V durchläuft.

Ein **Elektronenvolt [1 eV]** ist die Energie, welche eine Elektronenladung e beim Durchlaufen einer Spannung von 1 Volt gewinnt.

$$\text{Elektronenladung } e = 1.602\ 176\ 487(40) \times 10^{-19}\ C\ \text{[Coulomb]}$$

$$\text{Spannung } V = 1V\ \text{[Volt]}$$

$$\text{Elektronenvolt } 1\,eV = 1.602\ 176\ 487(40) \times 10^{-19}\ J\ \text{[Joule]}$$

Geschwindigkeit eines Elektrons mit E_{kin}=1 eV

Elektronenvolt $1\,\mathrm{eV} = 1.602\ 176\ 487(40)\times 10^{-19}$ J [Joule]

Elektronen Masse $m_e = 9.109\ 382\ 15(45)\times 10^{-31}$ kg

Geschwindigkeit eines Elektrons mit $E_{kin} = 1\,eV$

klassisch $$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e \upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.602\ 176\ 487(40)\times 10^{-19}\ \mathrm{J}}{9.109\ 382\ 15(45)\times 10^{-31}\ \mathrm{kg}}}$$

$$\upsilon = 593097\,\mathrm{m/s}$$

relativistisch $$E_{kin} = (\gamma - 1) m_e c^2 \Rightarrow \quad \gamma = \frac{E_{kin}}{m_e c^2} + 1; \quad \upsilon = c\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

$$\gamma = \frac{1.602\ 176\ 487(40)\times 10^{-19}\ \mathrm{J}}{9.109\ 382\ 15(45)\times 10^{-31}\ \mathrm{kg}\cdot\left(299\ 792\ 458\,\mathrm{m/s}\right)^2} + 1$$

$$= 1.00000195695$$

$$\upsilon = 593096\,\mathrm{m/s}$$

Ein ruhendes Elektron wird durch eine **Spannung** von **1 Volt** auf knapp **600 km/s** beschleunigt!

Elektronengeschwindigkeit

Spannung [V]	Kinetische Energie [eV]	Kinetische Energie [Joule]	Elektronen-geschwindigkeit **Klassisch** $E_{kin}=\frac{1}{2}m\upsilon^2$	Elektronen-geschwindigkeit **Relastivistisch** $E_{kin}=(\gamma-1)mc^2$
1 V	**1 eV**	**1.6 x 10^{-19} J**	~~**593 km/s 0.002 c**~~	**593 km/s 0.002 c**
1000 V	**1 keV**	**1.6 x 10^{-16} J**	~~**18755 km/s 0.063 c**~~	**18730 km/s 0.062 c**
10^6 V	**1 MeV**	**1.6 x 10^{-13} J**	~~**593097 km/s 1.978 c**~~	**282128 km/s 0.94 c**
10^9 V	**1 GeV**	**1.6 x 10^{-10} J**	~~**187550373 km/s 62.6 c**~~	**299792 km/s 0.9999998 c**
10^{12} V	**1 TeV**	**1.6 x 10^{-7} J**	~~**593096981 km/s 1978 c**~~	**299792 km/s 0.9999999999998 c**

Die klassische Rechnung ist offensichtlich falsch, da bei Spannungen von
1 Million Volt schon fast die doppelte Lichtgeschwindigkeit als falsches Resultat erhalten wird.

Bei Spannung bis zu einigen 10´000 Volt kann auch klassisch gerechnet werden.
Bei höheren Spannungen erreicht das Elektron relativistische Geschwindigkeiten.
zBsp Fernsehröhre: *V=50´000* Volt

Teilchenmasse

Gemäss $E_0=mc^2$, sind Masse und Energie zueinander äquivalent.

Es ist daher möglich, die Masse eines Elektrons in Einheiten von [eV] zu bestimmen:

Elektronenvolt $1\,\mathrm{eV} = 1.602\ 176\ 487(40) \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$ [Joule]

Elektronenmasse $m_e = 9.109\ 382\ 15(45) \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$

Energie eines ruhenden Elektrons

$$
\begin{aligned}
E_0 &= m_e c^2 \\
&= 9.109\ 382\ 15(45) \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot \left(299\ 792\ 458\ \mathrm{m/s}\right)^2 \\
&= 8.1871 \times 10^{-14}\ \mathrm{J} \\
&= 510999\ \mathrm{eV}
\end{aligned}
$$

und somit:

$$\boxed{m_e = 510999\ \mathrm{eV}/c^2 \quad \approx 511\ \mathrm{keV}/c^2}$$

Teilchenmassen

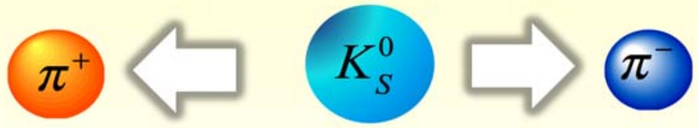
Ganz allgemein kann die Masse von Protonen und weiteren Teilchen in Einheiten von [eV/c²] angegeben werden:

Teilchen	Masse [kg]	Masse × c^2 [Joule]	Masse × c^2 [MeV/c^2]
Elektron	9.109×10^{-31} kg	8.187×10^{-14} J	0.510999 MeV/c^2
Proton	1.672×10^{-27} kg	1.503×10^{-10} J	938.272 MeV/c^2
Neutron	1.675×10^{-27} kg	1.505×10^{-10} J	939.565 MeV/c^2
Myon	1.884×10^{-28} kg	1.693×10^{-11} J	105.658 MeV/c^2
Atomare Masseneinheit: 1/12 der Masse eines ^{12}C Kohlenstoff Kern	1.661×10^{-27} kg	1.492×10^{-10} J	931.494 MeV/c^2

Für Physiker:
In natürlichen Einheiten wird die Lichtgeschwindigkeit c=1 gesetzt, was zu vielen Vereinfachungen führt, und daher praktisch ist. In natürlichen Einheiten ausgedrückt ist zBsp die Protonmasse m_P = 938 MeV ≈ 1 GeV, was man sich leicht merken kann.
In dieser Vorlesung wird c jeweils mitgeschrieben, so dass m_P=938 MeV/c^2 ist.

Beispiel: Kaon-Zerfall

Kaonen K_S, K_L^0, K^+, K^- gehören zu den Mesonen und bestehen wie die Pionen aus einem Quark und einem Anti-Quark. Das neutrale K_S^0 zerfällt mit einer mittleren Lebensdauer $\tau_{K_S^0} = 0.89 \times 10^{-10}\, s$ in zwei Pionen: $K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Dabei gilt die relativistische Impuls- und Energieerhaltung.

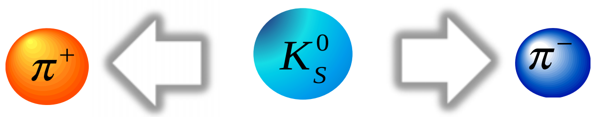


π^+	postiv geladenes Pion:	Up-Quark	+Anti-Down-Quark	$(u, \bar{d})$
π^-	negativ geladenes Pion:	Down-Quark	+Anti-Up-Quark	$(d, \bar{u})$
K_S^0	Neutrales Kaon:	Strange-Quark	+Anti-Down-Quark	$(s, \bar{d})$

Sind die Massen des Kaons und der Pionen bekannt, lässt sich nun die Geschwindigkeit mit der die Pionen erzeugt werden berechnen.

Es gilt: $m_{K_S^0} = 497.7\ \text{MeV}\,\text{c}^{-2}$ und $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 139.6\ \text{MeV}\,\text{c}^{-2}$

Kaon-Zerfall



$$K_S^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$$

Impulserhaltung:

$$0 = \underbrace{m_{\pi^+}\gamma_{\pi^+}\vec{\upsilon}_{\pi^+}}_{\vec{p}_{\pi^+}} + \underbrace{m_{\pi^-}\gamma_{\pi^-}\vec{\upsilon}_{\pi^-}}_{\vec{p}_{\pi^-}}$$

$$\Rightarrow \gamma_{\pi^-}\upsilon_{\pi^-} = -\gamma_{\pi^+}\upsilon_{\pi^+}$$

$$\frac{\upsilon_{\pi^-}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_{\pi^-}^2}{c^2}}} = \frac{-\upsilon_{\pi^+}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_{\pi^+}^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \upsilon_{\pi^-} = -\upsilon_{\pi^+} \equiv \upsilon \qquad \Rightarrow \gamma_{\pi^-} = \gamma_{\pi^+} \equiv \gamma$$

Die beiden Pionen haben entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeit, sie fliegen unter 180° auseinander!

Energieerhaltung:

$$\underbrace{M_{K_S^0}c^2}_{E_{0,K_S^0}} = \underbrace{m_{\pi^+}\gamma c^2}_{E_{\pi^+}} + \underbrace{m_{\pi^-}\gamma c^2}_{E_{\pi^-}}$$

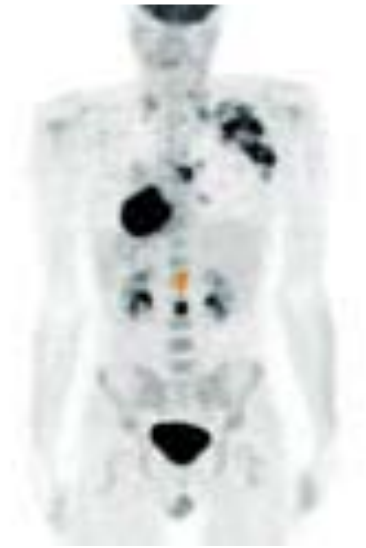
$$\Rightarrow M_{K_S^0} = 2m_\pi\gamma \quad \Rightarrow \gamma = \frac{M_{K^0}}{2m_\pi} = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \upsilon = c\sqrt{1-\left(\frac{2m_\pi}{M_{K_S^0}}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{2\cdot 139.6}{497.7}\right)^2} \boxed{= 0.83\cdot c}$$

Die Geschwindigkeit dieser Pionen beträgt 83% der Lichtgeschwindigkeit, sie sind also hoch relativistisch.

Relativitätstheorie

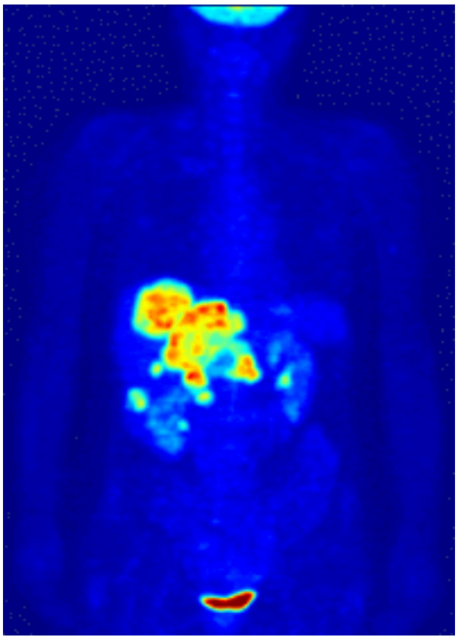
Anwendung:
Positronen-Emissions-Tomographie – PET



Relativistische Kinematik

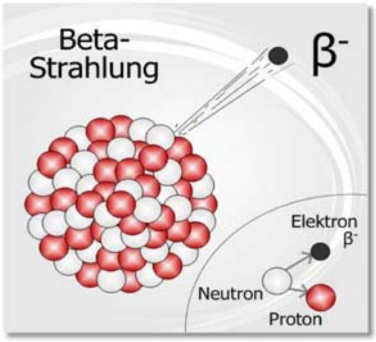
Moderne medizinische Untersuchungen wie zBsp die **Positronen-Emissions-Tomographie**, die auch **PET-Scan** genannt wird, basieren direkt auf:

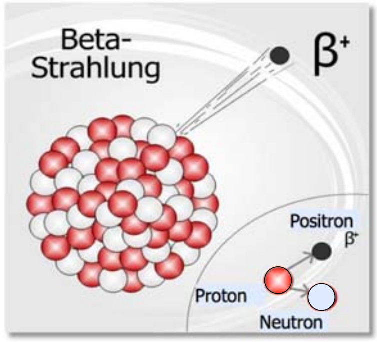
- der **Teilchenphysik**
  - insbesondere die gegenseitige Annihilation von Anti-Elektronen, die auch Positronen e^+ genannt werden, mit Elektronen e^- in Photonen γ. Dies wird als $e^+ + e^- \rightarrow \gamma\gamma$ geschrieben.
- der **Relativitätstheorie**
  - insbesondere relativistischer Kinematik, wobei die Äquivalenz von Energie und Masse $E=mc^2$ erarbeitet wird.
  - sowie die Energie E_γ, und Impuls p_γ von masselosen Photonen, die erst erarbeitet werden müssen.



PET-Scan
Bereiche wo besonders viele $e^+ + e^- \rightarrow \gamma\gamma$ Annihilationen stattfinden sind deutlich sichtbar. Damit lassen sich Stoffwechselaktivitäten im lebenden Körper markieren.

Einschub – Beta-Strahlung





β^- Strahlung

Ein **Elektron** wird vom Kern emittiert; dabei zerfällt ein Neutron in ein Proton, ein Elektron und ein Anti-Elektron-Neutrino.
zBsp:

$$^{24}Na \longrightarrow {}^{24}Mg + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$T_{½} = 14.95 \text{ Stunden}$$

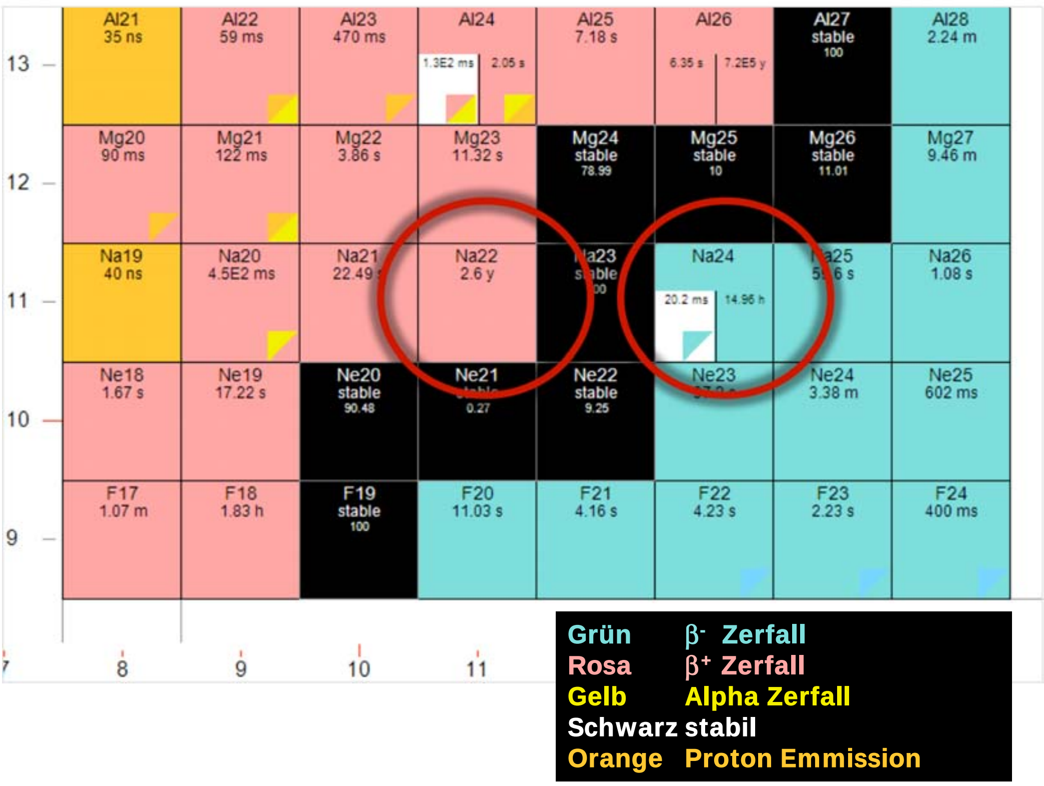
β^+ Strahlung

Ein **Positron** wird vom Kern emittiert; dabei zerfällt ein Proton in ein Neutron, ein Positron und ein Elektron-Neutrino.
zBsp:

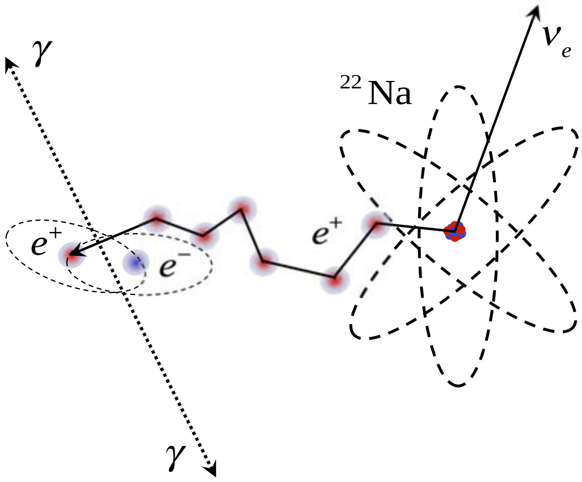
$$^{22}Na \longrightarrow {}^{22}Ne + e^+ + \nu_e$$

$$T_{½} = 2.6 \text{ Jahre}$$

Nuklidkarte



Annihilation von Positron & Elektron



Radioaktives ^{22}Na zerfällt mit einer Halbwertszeit von 2.6 Jahren

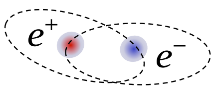
Dabei wird ein **Positron e⁺** und ein **Neutrino** ν freigegeben.

Das **Positron e⁺** bewegt sich nicht frei, sondern wird durch Stösse an Elektronen der im Material vorhandenen Atome gestoppt.

Das **Positron e⁺** kommt schliesslich zur Ruhe...

...und bildet mit einem Elektron einer Atomhülle eines umgebenden Atoms **Positronium**.

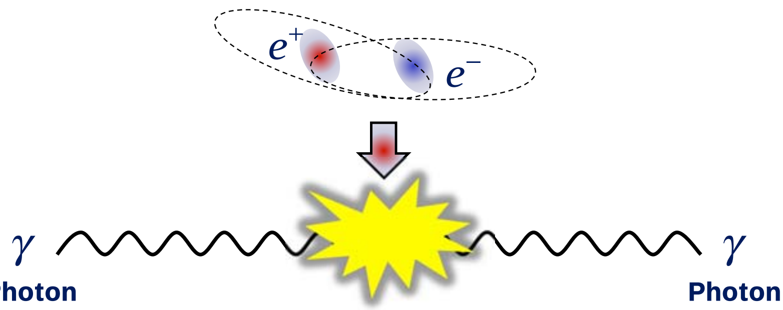
Positronium
ist ein gebundener Zustand aus einem Elektron und einem Positron.



Elektron und Positron annihilieren nach kurzer Zeit; dabei entstehen zwei **Photonen**, welche unter 180°, d.h. ko-linear, voneinander wegfliegen.

Positronium Zerfall

Das Elektron und das Positron (Anti-Elektron) annihilieren nach einer mittleren Lebensdauer $\tau=1.244\times10^{-10}$ s in zwei Photonen $e^-+e^+\rightarrow\gamma\gamma$

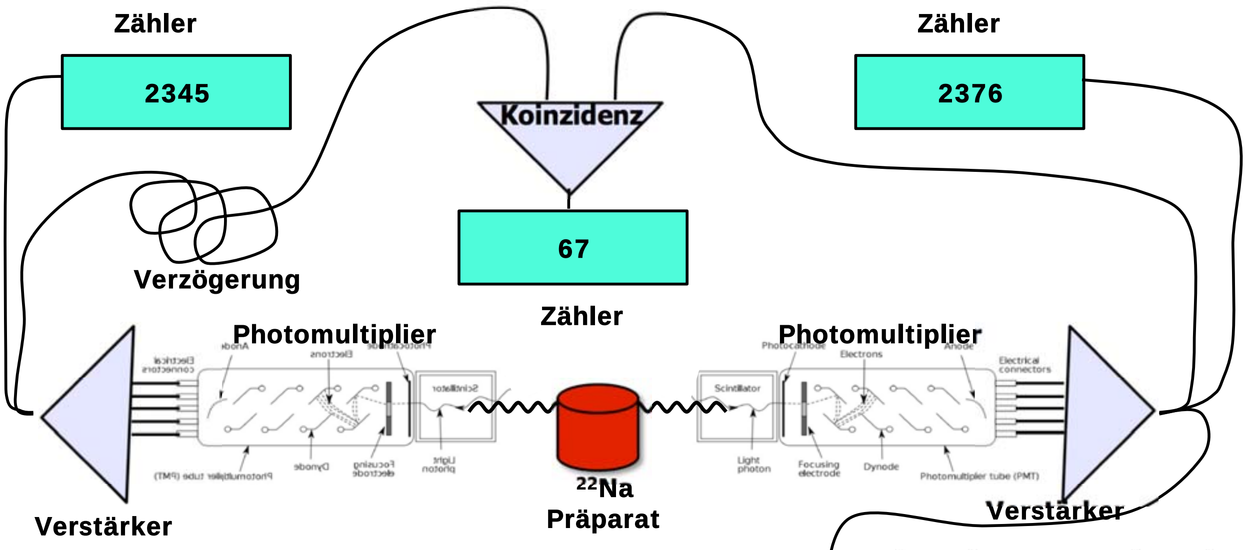


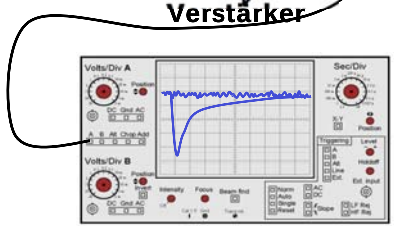
$$M_{Positronium} = \underbrace{2m_e}_{1022\ \mathrm{keV}/c^2} - \underbrace{Bindungsenergie}_{6.8\ \mathrm{eV}/c^2} \approx 1022\ \mathrm{keV}/c^2$$

$$M_{Positronium}c^2 = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} = 2E_\gamma$$
$$E_\gamma = 511\ \mathrm{keV}$$

Die Energie jedes der beiden Photonen entspricht (fast) exakt der Elektronenmasse: $E_\gamma = m_e \cdot c^2$

Versuchsaufbau Positronium Zerfall





511 keV Photonen des Positronium Zerfalls laufen zeitgleich, und unter 180^0 auseinander.

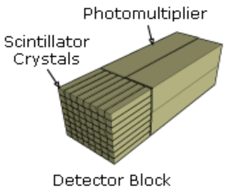
Die Kabellänge ist entscheidend um die Koinzidenz der elektrischen Signale abzustimmen, welche mit 60-80% der Lichtgeschwindigkeit durch die Kabel laufen.

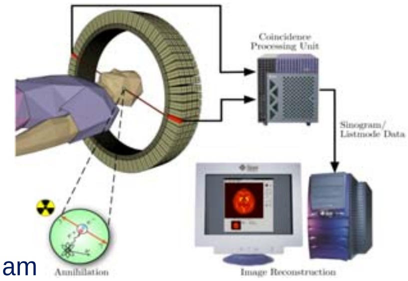
Anwendung – PET

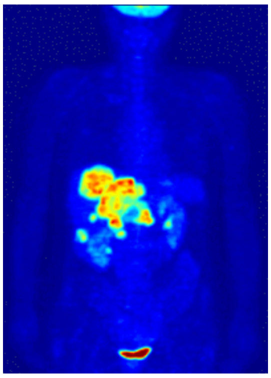
PET – Positronen-Emissions-Tomographie

Bei einem **Patienten**, dem **eine Positronen Emmitter Substanz (Radiopharmakon)** verabreicht wurde, kann die Position, bei der das Positronium annihliert, genau gemessen werden. Je nach Wahl der Trägersubstanz des Radiopharmakons, können so bestimmte Organe (Gehirn, Leber, Darm, Drüsen,...) mit dem Radiopharmakon angerreichert werden. Wenn dieses zerfällt, werden Positronen ausgesendet, welche innerhalb des Organs Positronium bildet, was schliesslich in zwei ko-lineare Photonen unter 180^o zerfällt. Durch messen dieser Photonen lässt sich der Ort der Annihilation und somit der Ort wo Stoffwechsel-aktivitäten stattfinden im Körper sichtbar machen.

PET – Positronen-Emissions-Tomographie



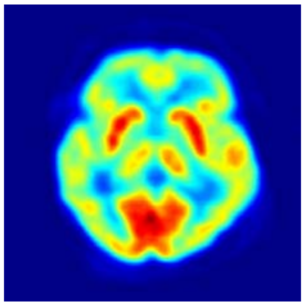




Ganzkörper
PET Scan

Nach einer bestimmten Zeit nach Einnahme ist das **Radiopharmakon** am Zielort angelangt und die beiden **ko-linearen 511 keV Photonen** können im **PET** gemessen werden. Da die beiden Photonen unter **180°** erzeugt und gemessen werden, ergibt sich eine Linie entlang dieser der Positronium-Zerfall stattfand.

Werden viele solche Linien gemessen und mittels eines **Computers** aufaddiert, lässt sich aus den Schnittpunkten dieser Linien ein **3D Bild** errechnen.
Die **Ortsauflösung,** die bei PET-Scans erreicht werden kann, ist limitiert durch den Weg, den das noch freie Positron im Körper zurücklegt und beträgt **ca. 4-5 mm.**



PET Scan eines
menschlichen Gehirns

Quantenmechanik

Lichtquanten
– Photoelektrischer Effekt

Quantenmechanik

Die **Quantenmechanik** beschreibt das Verhalten von Materie im atomaren und subatomaren Bereich.

Quantenmechanik ist eine der Hauptsäulen der modernen Physik und bildet die Grundlage für viele ihrer Teilgebiete:

- Atomphysik
- Kernphysik
- Elementarteilchenphysik
- Festkörperphysik
- Quantenchemie
- Quantenelektronik
- Quantenoptik
- ….
- Kosmologie !

Aufbauend auf der **Quantentheorie** von **Planck**, **Einstein**, **Bohr**, **de Broglie** wurde die **Quantenmechanik** in den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts von **Werner Heisenberg** und **Erwin Schrödinger** erarbeitet.

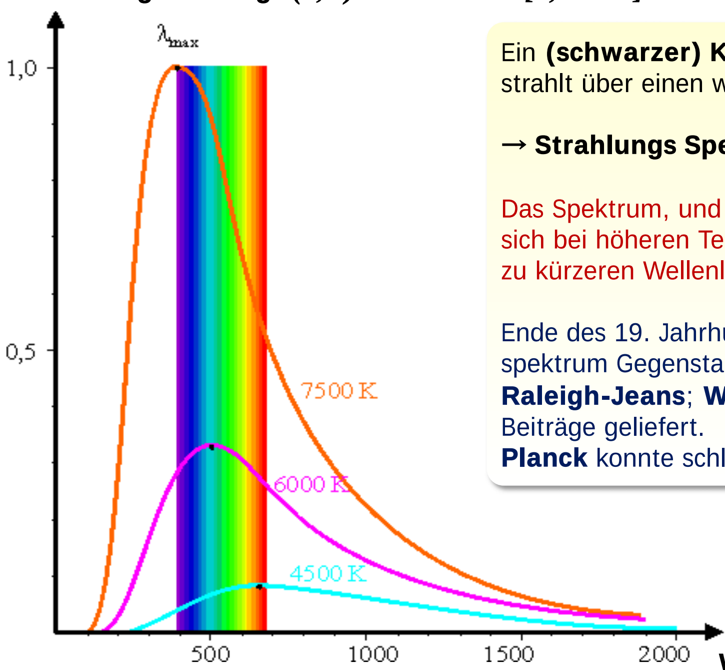
Weitere wichtige Beiträge zur **Quantenmechanik** wurden unter anderem von **Max Born**, **Pascual Jordan**, **Wolfgang Pauli**, **Niels Bohr**, **Paul Dirac** und **John von Neumann** geleistet.

Wärmestrahlung

- **Die spektrale Verteilung der Wärmestrahlung hängt von der Temperatur des Körpers ab.**
  - **Je heißer dieser ist, desto mehr ist das Maximum der Spektralverteilung zu kurzen Wellenlängen hin verschoben.**
  - **Eisen ist bei ca. 550°C rotglühend und wird bei weiterer Temperatursteigerung weißglühend.**

Wärmestrahlung

Strahlungsleistung $I(\lambda,T)$ im Intervall $[\lambda, \lambda+\Delta\lambda]$



Wellenlänge λ in nm

Ein **(schwarzer) Körper** einer Temperatur T
strahlt über einen weiten Wellenlängen Bereich.

→ Strahlungs Spektrum

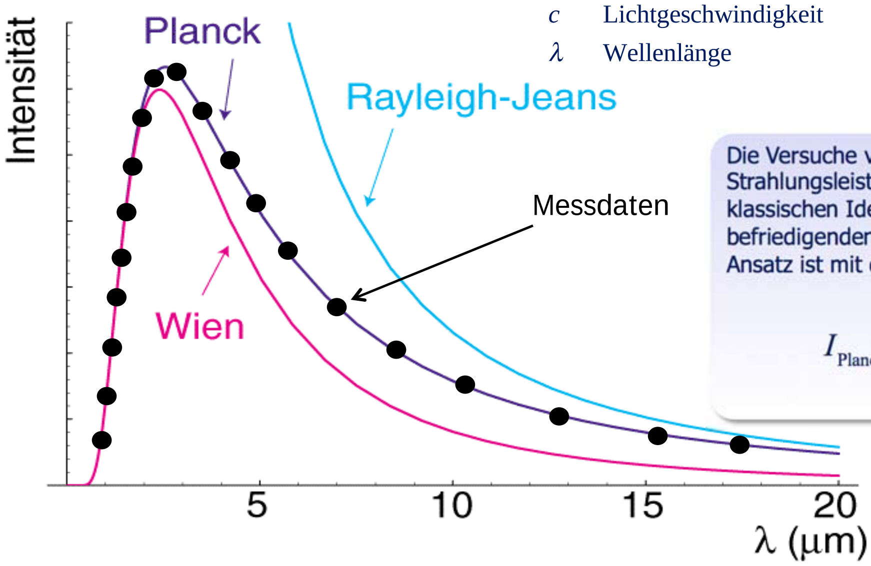
Das Spektrum, und insbesondere das Maximum, verschiebt sich bei höheren Temperaturen
zu kürzeren Wellenlängen

Ende des 19. Jahrhunderts war dieses Strahlungs-spektrum Gegenstand intensivster Forschung.
Raleigh-Jeans; **Wien** und **Planck** haben wichtige Beiträge geliefert.
Planck konnte schliesslich das Spektrum erklären...

1900 – Planck´sches Strahlungsgesetz

$$I_{\text{Planck}}(\nu,T)=\frac{\nu^2}{c^2}\cdot\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

I	Strahlungsleistung (Intensität)	$[\mathrm{J\,m^{-2}s^{-1}}]$	
ν	Frequenz der Strahlung	[Hz]	
T	Temperatur des Schwarzkörpers	[K]	
k	Boltzmann Konstante		$k=1.3806488(13)\times10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
h	Planck´sche Konstante		$h=6.6260693(11)\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
c	Lichtgeschwindigkeit		$c=299\,792\,458\,ms^{-1}$
λ	Wellenlänge		λ=c/ν [m]



Die Versuche von Rayleigh-Jeans und von Wien die Strahlungsleistung eines Schwarzen Körpers mit klassischen Ideen zu berechnen führt nicht zu befriedigenden Resultaten. Einzig der Planck´sche Ansatz ist mit den Messdaten kompatibel.

$$I_{\text{Planck}}(\lambda,T)=\frac{1}{\lambda^3}\cdot\frac{h\cdot c}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}$$

Planck´sches Wirkungsquantum

$$I_{\text{Planck}}(\nu,T)=\frac{\nu^2}{c^2}\cdot\frac{h\cdot\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

Max Planck meinte dazu, es sei eine **”glücklich erratene Interpolationsformel”**, wobei er die Annahme traf, dass die Schwarzkörperstrahlung durch **atomare Oszillatoren** hervorgerufen wird, welche Energie nur in **Energiequanten des Betrags $h\nu$** abgeben oder aufnehmen können.

***h*, das Planck´sche Wirkungsquant** ist eine **Naturkonstante** welche die Proportionalität zwischen der Energie E und der Frequenz ν eines atomare Oszillators angibt: $E=h\nu$.

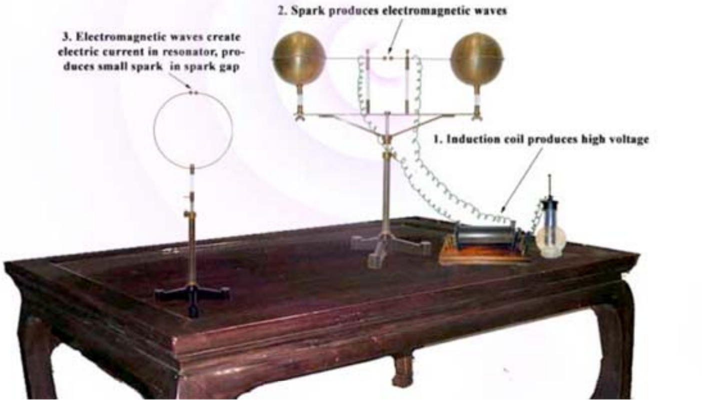
$$h=6.6260693(11)\times10^{-34}\,Js$$

Planck´sches Wirkungsquantum

Max Planck
* 23. April 1858 in Kiel
† 4. Oktober 1947 in Göttingen

Nobelpreis 1918
„für seine Arbeit über die Entdeckung von Energiequanten“

Nachweis elektromagnetischer Wellen



Heinrich Hertz
* 22. Februar 1857 in Hamburg
† 1. Januar 1894 in Bonn

Versuchsaufbau von Hertz: Ein Funkensprung erzeugt eine elektromagnetische Welle, welche in einer Ringelektrode eine Spannung induziert und auch dort ein Funke erzeugt. 1887/88 konnte er so eindeutig die von Maxwell 1864 vorhergesagten elektromagnetischen Wellen nachweisen.

Hertz bemerkte dabei, dass die Funken in der Ringelektrode eher springen, wenn **UV-Licht** auf die Ringelektrode scheint. (Versuche im Dunkeln; bei Sonnenlicht; mit Glasscheibe vor der Ringelektrode; und mit Quarzglas vor der Ringelektrode)

Ein Funke springt schon bei niedriger Spannung über, wenn die Ringelektrode mit UV-Licht bestrahlt wird (1886). ⇒ Entdeckung des Photoelektrischen Effekts.

Photoelektrischer Effekt

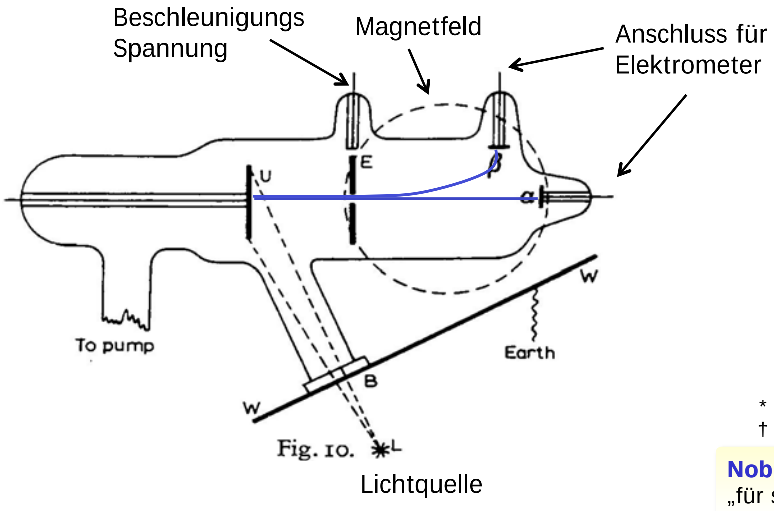


Fig. 10.

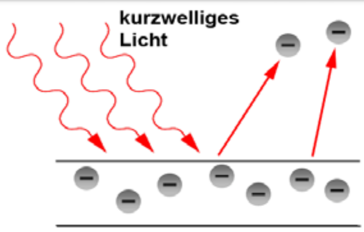
Philipp Lenard

* 7. Juni 1862 in Pressburg (Heute Bratislava)
† 20. Mai 1947 in Messelhausen, Deutschland

Nobelpreis 1905
„für seine Arbeit über Kathodenstrahlen“

Kathodenstrahlröhre, mit beleuchteter Kathode

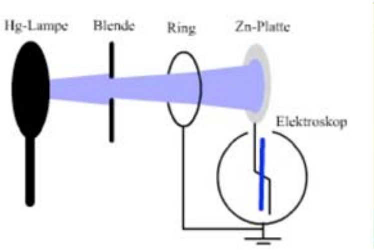
⇒ Licht „schlägt“ Kathodenstrahlen (Elektronen) aus der Elektrode heraus !



Photoeffekt

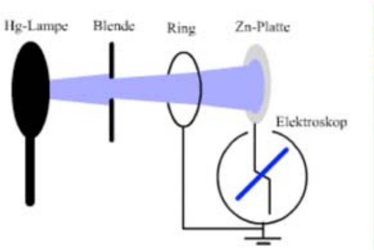
Die **Zinkplatte** auf dem Elektroskop wird **negativ geladen** und anschließend mit Licht der **Hg-Lampe** bestrahlt.

Dabei entlädt sich die Zinkplatte wieder.



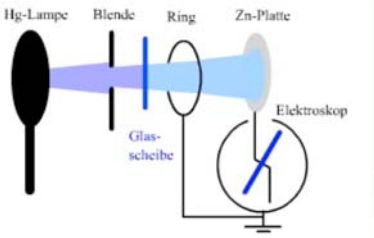
Die **Zinkplatte** auf dem Elektroskop wird **positiv geladen** und anschließend mit Licht der **Hg-Lampe** bestrahlt.

Dabei fliesst keine Ladung weder auf die Platte zu noch von ihr weg.

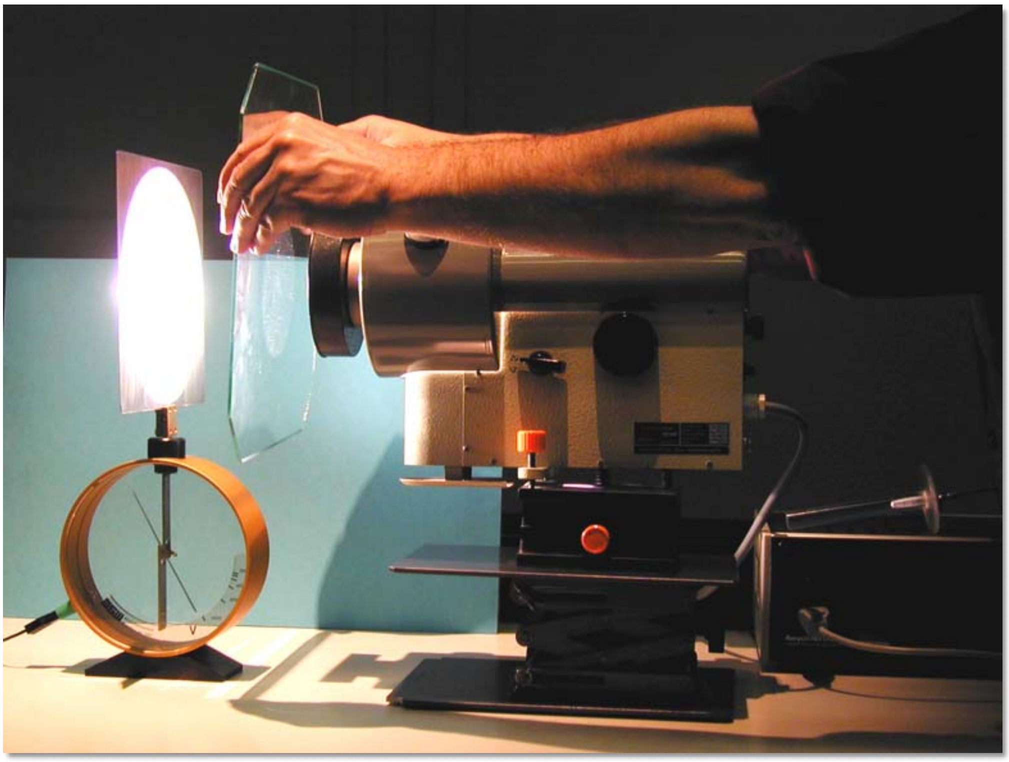


Die **Zinkplatte** auf dem Elektroskop wird **negativ geladen** und anschließend mit Licht der **Hg-Lampe** bestrahlt und eine **Glasplatte dazwischen gehalten**.

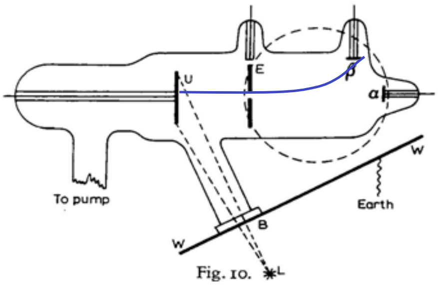
Sobald sich die Glasplatte zwischen der Lampe und der Zinkplatte befindet, fliesst keine Ladung mehr von der Platte weg.



Photoeffekt im Hörsaal



Photoeffekt: Abhängigkeit von Frequenz



Die Geschwindigkeit und damit die kinetische Energie der Elektronen ist aus der Krümmung des Kathodenstrahls bestimmbar.
Im Folgenden ist R der Krümmungsradius der Elektronenbahn innerhalb der magnetischen Induktion B:

$$\vec{F}_{Lorentz} = e\vec{\upsilon} \times \vec{B} = e\left|\vec{B}\right|\left|\vec{\upsilon}\right|$$

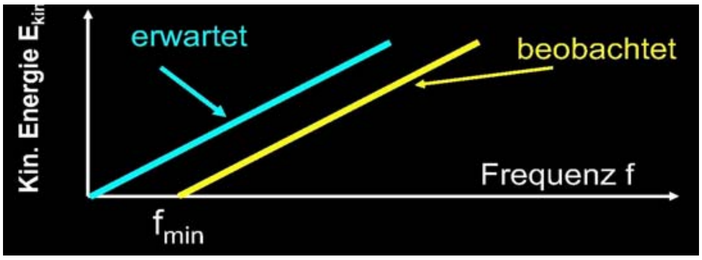
$$\vec{F}_{Zentripetal} = \frac{m\upsilon^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad eB\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{R}$$

$$\upsilon = \frac{e}{m}BR$$

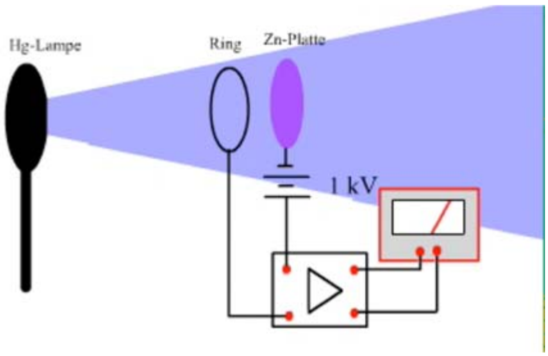
$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{e^2}{2m}B^2R^2}$$

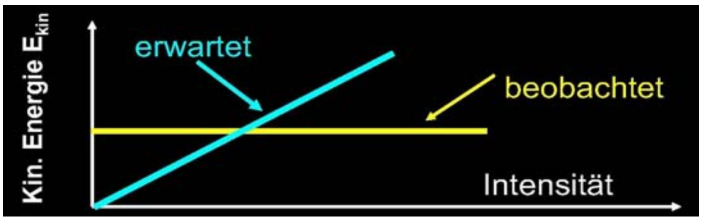
Rotes , Gelbes, Blaues, etc. Licht



Die kinetische Energie der Elektronen nimmt linear mit der Frequenz des eingestrahlten Lichts zu. **Es gibt eine minimale Frequenz unterhalb der kein Photoeffekt stattfindet.**

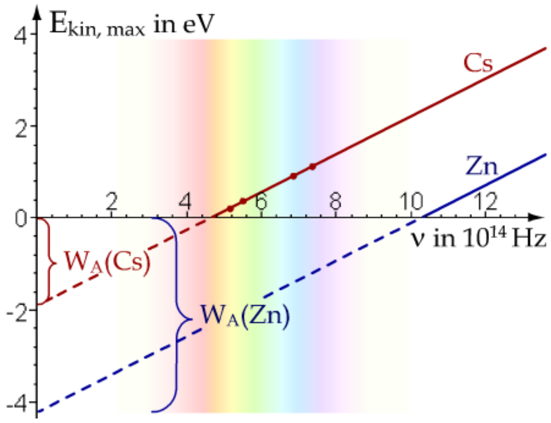
Photoeffekt: Abhängigkeit von Intensität





Bei wachsender Lichtintensität wächst die Zahl der Elektronen, nicht jedoch ihre Geschwindigkeit, die ausschließlich von der Frequenz des eingestrahlten Lichts abhängig ist.

Photeffekt: Zinkplatte und Cäsiumplatte



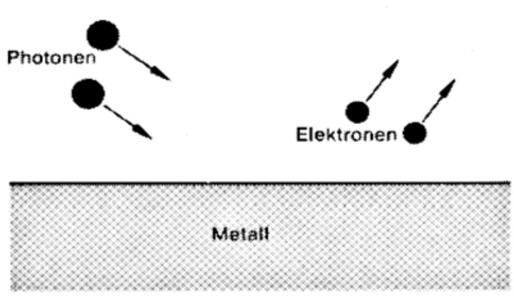
Cäsium (Cs):
Mit sichtbarem Licht findet der Photoeffekt statt.

Zink (Zn):
Nur mit UV Licht findet der Photoeffekt statt.

- Die kinetische Energie der Elektronen steht in einem linearen Zusammenhang mit der Frequenz des Lichts.
- Die minimale Frequenz bei der der Photoeffekt auftritt ist abhängig von der Wahl des Materials der Kathode.
- Die Steigung der Geraden ist unabhängig von der Wahl des Materials.

Diese experimentell gefundenen Zusammenhänge sind nicht mit der klassischen Vorstellung von elektromagnetischen Lichtwellen vereinbar!

Deutung des Photeffekts durch Einstein



Die Deutung des Photoeffekts. Photonen treffen auf der Metalloberfläche auf und schlagen Elektronen heraus.

Albert Einstein
* 14. März 1879 in Ulm
† 18. April 1955 in Princeton

Photonen
(Lichtquanten–Hypothese; Bern 1905)

Licht besteht aus einzelnen Photonen, welche die Energie in ganzen Paketen, also Quantenhaft, mit Materie austauschen.
Die Energie E_γ eines Photons ist proportional zu seiner Frequenz ν_γ. Es gilt:

$$E_\gamma = h\nu_\gamma$$

Der Photoelektrische Effekt lässt sich so im Teilchenbild leicht erklären.
Im Wellenbild macht dies aber keinen Sinn.

Ist Licht nun Welle oder Teilchen...?

Licht: Teilchen oder Welle ?

Licht als Teilchenstrahlung (**1669 Isaac Newton**)
Licht besteht aus winzigen Partikeln, die von Lichtquellen herausgeschleudert werden.
Damit lässt sich die **geradlinige** und **allseitige** Ausbreitung von Licht erklären. Sowie lässt sich **Farbe** und **Dispersion** auf Eigenschaften dieser Lichtteilchen zurückführen.

Licht als Welle (**1677 Christian Huygens**)
Damit lässt sich **Beugung** und **Interferenz** erklären.

Licht als elektromagnetische Welle (**1871 James Clerk Maxwell**)
Theoretische Vorhersage von elektromagnetischen Wellen.
(Maxwell Gleichungen!)

Licht als elektromagnetische Welle (**1886 Heinrich Hertz**)
Experimenteller Nachweis, dass Licht aus elektromagnetischen Wellen besteht.

Um 1900 galt die elektromagnetische Wellennatur des Lichtes als absolut gesichert!

1905 hat Einstein mit seiner Lichtquantenhypothese eine tiefgreifende Frage wieder neu belebt.

Minimale Frequenz

Die Energie eines Photons ist gerade $E_\gamma = \mathrm{h}\nu$. Weiter gilt Energieerhaltung, wenn Photonen Elektronen aus Metallplatten herausschlagen. Diese Elektronen müssen aus dem Metall herausgelöst werden, und erhalten zusätzlich eine kinetische Energie. Es gilt:

$$E_\gamma = \mathrm{h}\nu = E_{\mathrm{kin}} + W$$

$\mathrm{h} = 6.6260693(11) \times 10^{-34}$ Js (Planck'sche Konstante)

ν	**Frequenz des Photons**
E_{kin}	**Kinetische Energie des Elektrons**
W	**Materialabhängige Austrittsarbeit [J]** W ist die Austrittsarbeit die nötig ist um ein Elektron vom Metall abzulösen.

Die kinetische Energie der Elektronen ist immer positiv: $E_{\mathrm{kin}} = h\nu - W \geq 0$.
Setzt man die kinetische Energie der Elektronen gleich Null, lässt sich so die minimale Photonenenergie $h\nu$ bestimmen, bei der der Photoeffekt gerade noch auftreten kann.

$$\Rightarrow \nu_{\mathrm{min}} = \frac{W}{h}$$

ν_{min} ist die minimale Frequenz die nötig ist, damit der photoelektrische Effekt auftreten kann.

Albert Einstein zum Photeffekt

Vermischtes

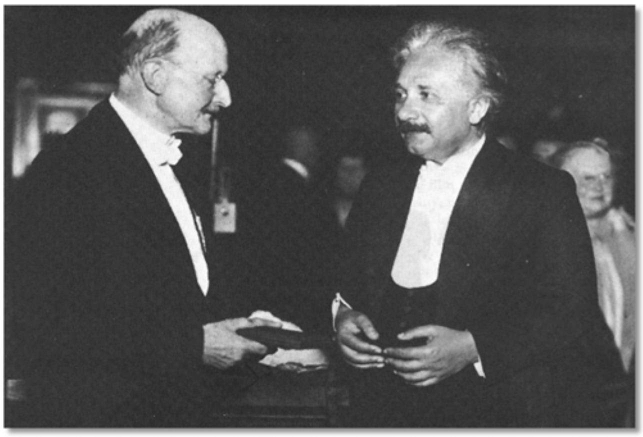
Privatstunden in
Mathematik u. Physik
für Studierende und Schüler erteilt gründlichst
Albert Einstein, Inhaber des eidgen. polyt. Fachlehrerdiploms,
Gerechtigkeitsgasse 32, 1. Stock.
Probestunden gratis. 4977

Kapital-Gesuch.
4983 Ein junger, strebsamer Hand-

Die Energie des Lichts bestehe aus
"in Raumpunkten lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als ganzes absorbiert und erzeugt werden können."

„Es war, wie wenn einem der Boden unter den Füssen weggezogen worden wäre, ohne dass sich irgendwo fester Grund zeigte, auf dem man hätte bauen können."

Albert Einstein, Max Planck



Planck 1913 – Bemerkung zur Aufnahme Einsteins in die Preussische Akademie der Wissenschaften:

"Dass er in seinen Spekulationen gelegentlich auch einmal über das Ziel hinausgeschossen haben mag, wie z. B. in seiner Hypothese der Lichtquanten, wird man ihm nicht allzu sehr anrechnen dürfen. Denn ohne einmal ein Risiko zu wagen, lässt sich auch in der exaktesten Wissenschaft keine wirkliche Neuerung einführen."

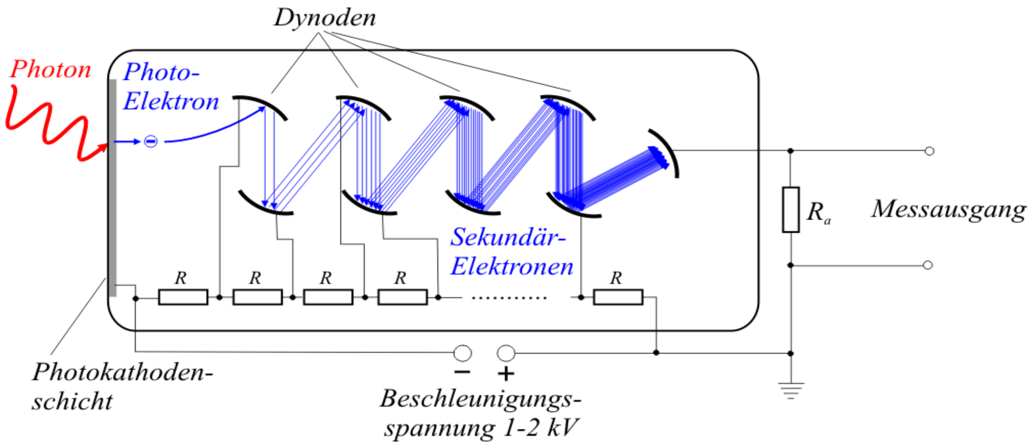
Nobelpreis 1921 für die Lichtquantenhypothese

... für seine Dienste in der theoretischen Physik, vor allem für die Deutung des Gesetzes des photoelektrischen Effektes.

- **Einstein war 1921 auf Weltreise (Japan)**
- **Der Deutsche Botschafter in Schweden nahm den Preis in Vertretung entgegen. Einstein war aber Schweizer Staatsbürger**
- **Das Preisgeld hatte Einstein bereits 1918 (!) seiner (Ex-)Frau zugesprochen, damit sie in die Scheidung einwilligt.**

Anwendung des Photoeffekts

Photomultiplier



Ein Photon erzeugt an einer Kathode ein Photo-Elektron, welches auf eine Dynode beschleunigt wird. Die Beschleunigungsspannung ist dabei so gross, dass an der Dynode mehrere Elektronen herausgeschlagen werden, welche wiederum zur nächsten Dynode hin beschleunigt werden. Über mehrere Stufen kann so aus einem Photon (oder einigen wenigen Photonen) ein messbares elektrisches Signal erzeugt werden.

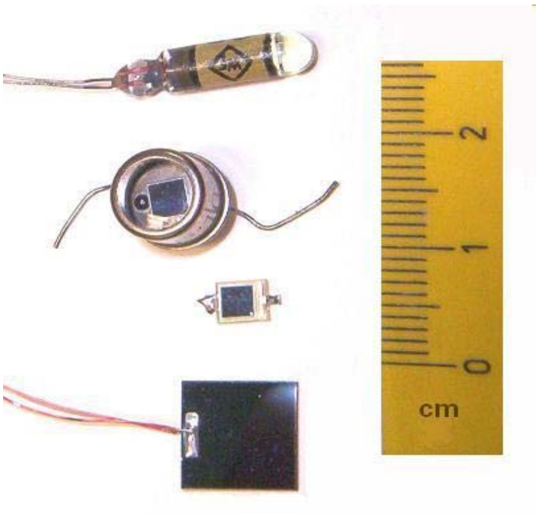
Die Signalstärke ist dabei proportional zur Photonenergie $E_\gamma = h\nu$.

Anwendungen des Photoeffekts

Photodiode

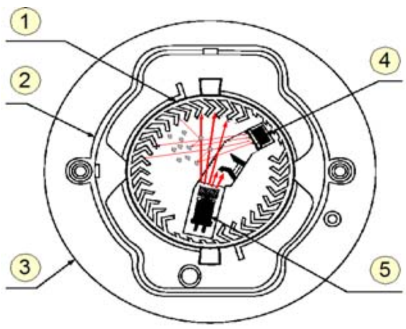
Photodioden sind Halbleiter-Dioden, die sichtbares Licht, in manchen Ausführungen auch IR-, UV- oder Röntgenstrahlen, mittels Photoeffekt in einen elektrischen Strom umwandeln.

zBsp Lichtschranken, Lifttüre, Laserscanner, Sensoren in Digitalkameras, CD + DVD Player, etc, etc....



Anwendungen des Photoeffekts

Rauchmelder



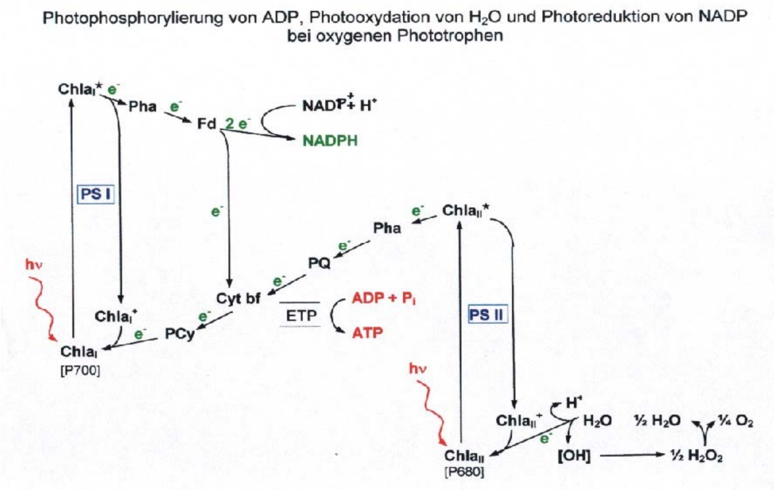
Klare Luft reflektiert praktisch kein Licht.
Befinden sich aber Rauchpartikel in der Luft und somit in der optischen Kammer (1) des Rauchmelders, so wird ein von einer Infrarot- Leuchtdiode (LED, 5) ausgesandter Prüf-Lichtstrahl an den Rauchpartikeln gestreut.
Ein Teil dieses Streulichtes fällt dann auf einen lichtempfindlichen Sensor (Photodiode, 4), der nicht direkt vom Lichtstrahl beleuchtet wird, und der Rauchmelder spricht an.
Von aussen eindringendes Fremdlicht wird durch das Labyrinth aus schwarzem, nicht reflektierendem Material verhindert.

Optischer Rauchmelder
1: Optische Kammer mit Labyrinth
2: Halter für Labyrinth
3: Gehäuse
4: Photodiode (Empfänger)
5: Infrarot-LED

Anwendungen des Photoeffekts

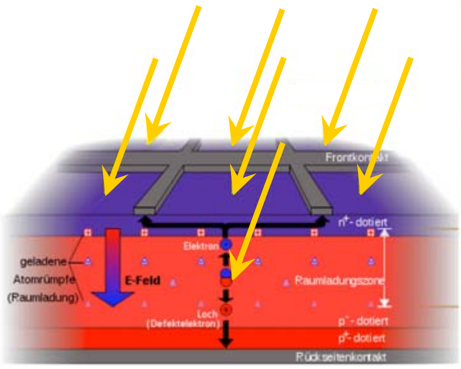
Photosynthese

Ein Photon schlägt ein Elektron aus einem Chlorophyllmolekül heraus. Dabei entsteht ein **freies Elektron** und ein **positiv geladenes Chlorophyll-Ion.** Diese werden benötigt um aus Wasser und Kohlenstoff Glucose zu bilden.



$Chla_I$ - Chlorophyll a_I	Fd - Ferredoxin	$NADP^+$ - Nicotinsäureadenindinucleotidphosphat oxydiert
$Chla_{II}$ - Chlorophyll a_{II}	Pcy - Plastocyanin	NADPH - Nikotinsäureadenindinucleotidphosphat reduziert
$Chla^+$ - Chlorophyll a positiv geladen	PQ - Plastochinon	ADP - Adenosindiphosphat
$Chla^*$ - Chlorophyll a angeregt	Cyt bf - Cytochrom-Komplex bf	ATP - Adenosintriphosphat
P700 - Photosystem I (PSI / P700)	Pha - Phaeophytin a	P_i - Phosphat, anorganisch
P680 - Photosystem II (PSII / P680)	hν - Lichtquanten	ETP - Elektronentransport-Phosphorylierung

Solarzellen



Solarzellen sind im Prinzip wie **grossflächige Photodioden** aufgebaut. Silizium-Halbleiter erzeugen bei Bestrahlung mit Licht **freie Ladungen** (Elektronen und positiv geladene Ionen).

Um aus diesen freien Ladungen einen elektrischen Strom zu erzeugen, ist ein **internes elektrisches Feld** nötig.

Dieses interne elektrische Feld wird durch spezielle **Dotierung** des verwendeten Siliziums erreicht, wobei Spannungen von etwa **0.5-0.6 V** erreicht werden.

Die Produktionsrate der freien Ladungsträger wächst proportional zur Intensität der Sonneneinstrahlung. Die Energie der Photonen wird zu etwa **15% in elektrische Energie** umgesetzt. Der Rest erwärmt die Solarzelle und wird durch Wärmetransportprozesse an die Umgebung abgegeben.

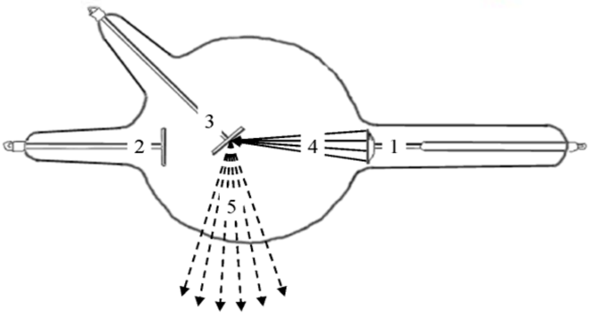
Pro dm^2 Zellenfläche können bis zu 2.5 Ampere Solarstrom und damit ca. **150 W/m²** elektrische Spitzenleistung bei maximaler Sonneneinstrahlung von ca. 1000 W/m² erwartet werden.

Die **Strahlungsleistung der Sonne,** bei senkrechter Einstrahlung und ohne den Einfluss der Atmosphäre wird als Solarkonstante bezeichnet; diese beträgt **1.3 kW/m²**.

Quanten Mechanik

Lichtquanten
– Röntgenstrahlung
– Compton Effekt

Röntgenstrahlung

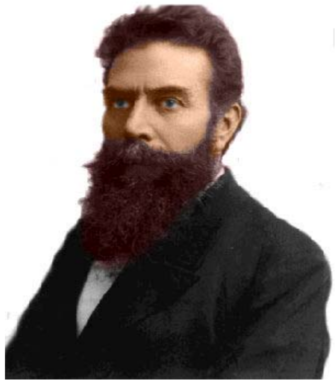


1 Cathode
2 Anode
3 Anticathode
4 Cathode rays (electrons)
5 X-rays

Röntgen entdeckte **1895** die **X-Strahlen**, die später unter Missachtung seines Testaments in **Röntgenstrahlen umbenannt** wurden.

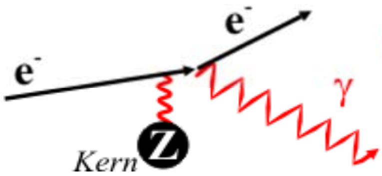
Diese Entdeckung geschah zufällig, als am 8. November 1895 bei einem **Experiment mit einer Kathodenstrahlröhre** ein speziell beschichtetes Papier zu leuchten begann.

Dieses Leuchten war aber auch dann noch zu erkennen, als die Entladungsröhre mit dicker schwarzer Pappe umschlossen war.



Wilhelm Conrad Röntgen
* 27. März 1845 in Remscheid
† 10. Februar 1923 in München

Nobelpreis 1901
„für seine Arbeit über die Entdeckung von Röntgenstrahlung“
(erster Nobelpreis der verliehen wurde)



Röntgenstrahlung

Wenn energetische Elektronen im elektrischen Feld eines Atomkerns gebremst werden, werden Photonen als Röntgenstrahlung emittiert.

Es gilt die Energieerhaltung. Da hier keine Massen umgewandelt werden, genügt es die Bilanz der kinetischen Energie zu betrachten, wobei die kinetische Energie des Elektrons durch die **Beschleunigungsspannung** V der Kathodenröhre gegeben ist:

$$\underbrace{eV}_{\text{Kinetische Energie des Elektrons}} = \underbrace{h\nu}_{\text{Energie des Photons; } \nu \text{ Frequenz [Hz]}} + \underbrace{E'_{kin}}_{\text{Kinetische Energie des gebremsten Elektrons}}$$

Die höchste Photonenergie wird dann erreicht, wenn das gebremste Elektron vollständig gestoppt wird:

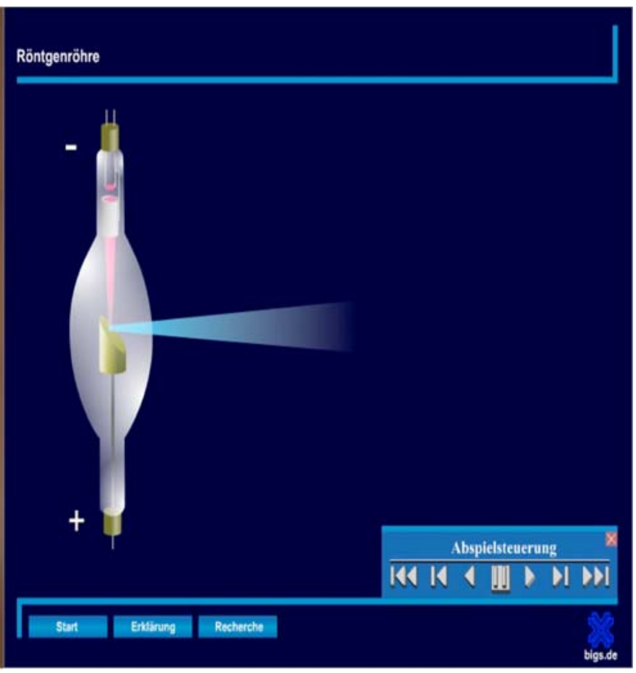
$$eV = h\nu + 0$$

$$\Rightarrow \nu_{max} = \frac{eV}{h} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \quad \text{folgt:}$$

$$\Rightarrow \lambda_{min} = \frac{hc}{eV} = 1.24 \times 10^{-6} \cdot V^{-1} \left[Vm \right]$$

Kleinste mögliche vorkommende Wellenlänge bei gegebener Beschleunigungsspannung V

Röntgenröhre



Photonen haben keine Masse

Photonen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit $\upsilon = c$. Sie haben eine Frequenz ν und eine Energie E_γ.
Wobei gilt:

$$\boxed{E_\gamma = h\nu}$$

Da die Energie eines Photons E_γ endlich ist, und sich Photonen schliesslich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, müssen Photonen masselos sein.
Dies lässt sich zeigen. Es gilt:

$$E = \gamma m c^2 \qquad \text{wobei} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \xrightarrow[\upsilon \to c]{} \infty$$

Für $\upsilon = c$ entstehen offensichtlich Probleme, wenn eine endliche Masse $m_\gamma \neq 0$ angenommen wird, da dies automatisch eine unendliche Energie zur Folge hätte.
Die Energie eines Photons ist endlich; sie ist $E_\gamma = h\nu$.
Dies bedeutet dass $m_\gamma = 0$ sein muss und auch, dass das Produkt $\gamma m_\gamma \neq 0$ endlich ist.

Impuls des Photons

Photonen haben einen Impuls p_γ. Dieser lässt sich aus der relativistischen Energie-Impulsbeziehung herleiten, die hier noch einmal hergeleitet wird:

$$E^2 - p^2c^2 = \underbrace{\gamma^2 m^2 c^4}_{E^2} - \underbrace{\gamma^2 m^2 \upsilon^2}_{p^2} \cdot c^2$$

$$= m^2c^2\gamma^2\left(c^2-\upsilon^2\right) = m^2c^2 \underbrace{\frac{1}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}_{\gamma^2}\left(c^2-\upsilon^2\right)$$

$$= m^2c^2 \frac{c^2}{\cancel{c^2-\upsilon^2}}\cancel{\left(c^2-\upsilon^2\right)}$$

$$\boxed{E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \qquad \textbf{relativistische Energie- Impulsbeziehung}}$$

Impuls des Photons

Photonen sind masselos, damit vereinfacht sich die relativistische Energie- Impulsbeziehung:

$$E_\gamma^2 - p_\gamma^2 c^2 = \underbrace{m_\gamma^2}_{0} c^4 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad E_\gamma^2 = p_\gamma^2 c^2$$

Für E_γ gilt $E_\gamma = h\nu$; somit gilt für den Photonimpuls p_γ:

$$h\nu = E_\gamma = p_\gamma c$$

$$p_\gamma = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Photonen haben sowohl eine Energie E_γ wie auch einen Impuls p_γ. Dabei gilt:

Energie und Impuls sind beide endlich, und zueinander proportional.

Energie und Impuls sind proportional zur Frequenz des Photons und umgekehrt proportional zu seiner Wellenlänge.

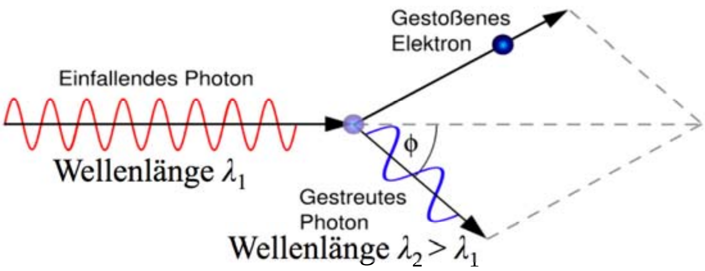
Energie und Impuls des Photons: Compton-Effekt

Compton untersuchte um **1922** die **Streuung von monochromatischen Röntgenstrahlen an Kristallen** und machte folgende Beobachtung: **Die gestreute Strahlung wies eine geringere Energie und eine größere Wellenlänge auf als die Strahlung vor der Streuung**. Demzufolge muss die Strahlung **Teilchencharakter** besitzen.

Arthur Holly Compton

* 10. September 1892 in Wooster
† 15. März 1962 in Berkeley

Nobelpreis 1927
„für seine Arbeit über die Entdeckung des Compton-Effekts"



$$\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\phi)$$

Wobei m_e die Elektronenmasse ist.

Versuchsaufbau Compton Effekt

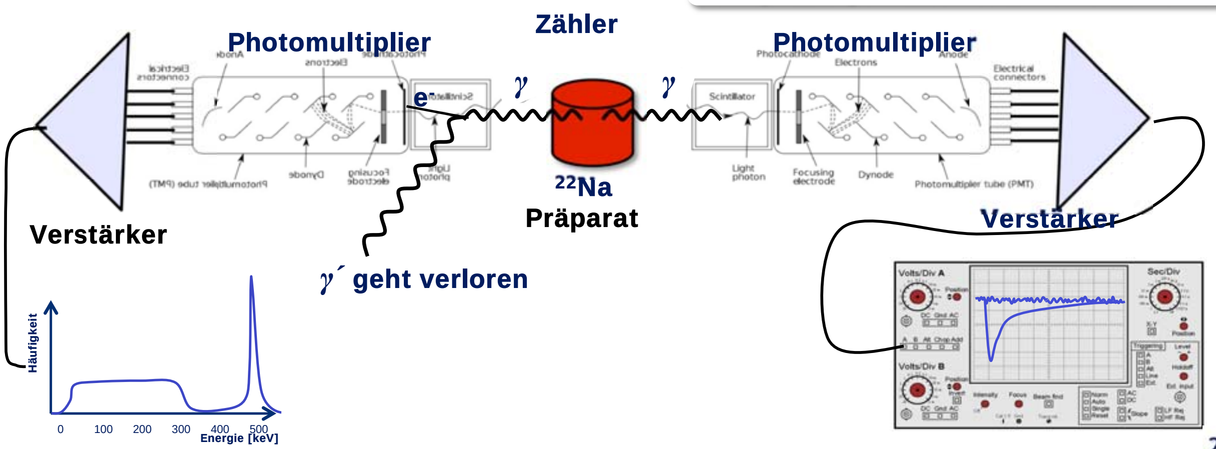
In einem ^{22}Na Präparat zerstrahlt Positronium in zwei 511 keV Photonen, die einen Winkel von 180° zueinander haben.

Immer wenn der rechte Photomultiplier ein 511 keV Photon misst, läuft auch ein 511 keV Photon nach links.

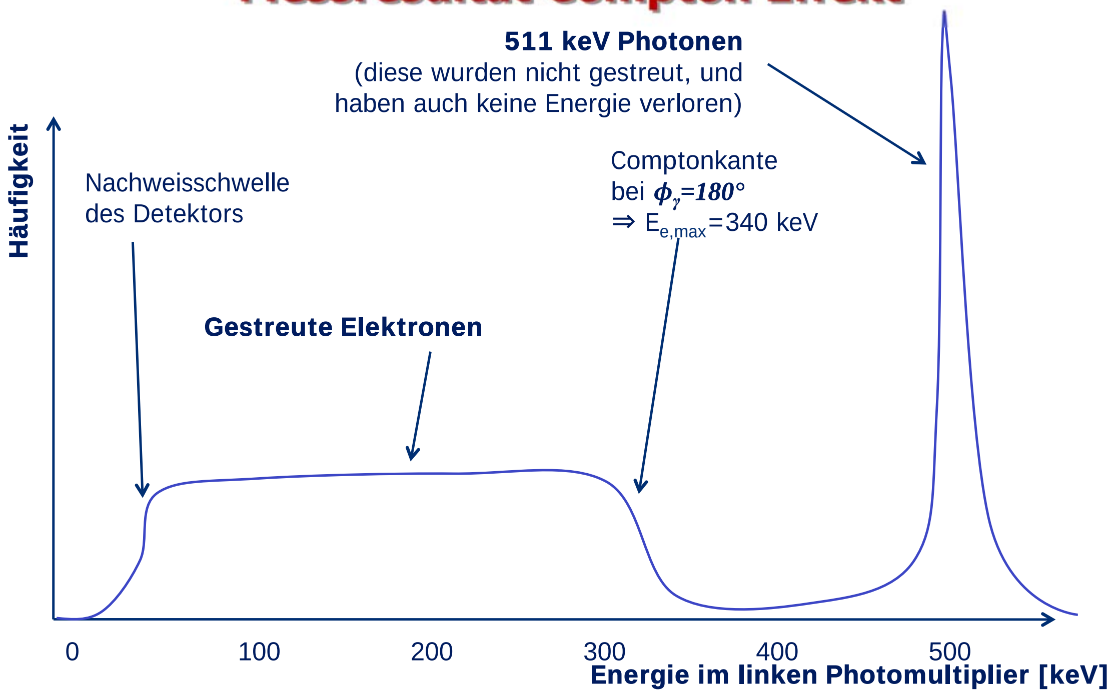
Durch Compton-Streuung kann das 511 keV Photon Energie verlieren, welche auf ein Elektron übergeht.

Dieses gestreute Elektron erzeugt ein Signal im linken Photomultiplier.

Die Energieverteilung die so am linken Photomultiplier gemessen wird, heisst Compton-Spektrum.

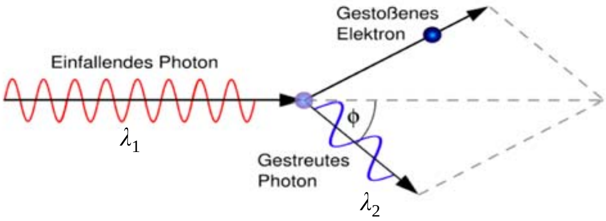


Messresultat Compton Effekt



Photonen verlieren tatsächlich Energie bei Stössen mit Elektronen.
Unterhalb der Comptonkante misst man die Energie der durch die 511 keV Photonen gestreuten Elektronen.

Compton-Effekt



Klassische Vorstellung:

Eine einfallende elektromagnetische Welle mit Frequenz υ bewirkt eine erzwungene Schwingung des Elektrons mit der selben Frequenz υ.
Ein oszillierendes Elektron bewirkt eine auslaufende elektro-magnetische Welle mit der selben Frequenz υ.

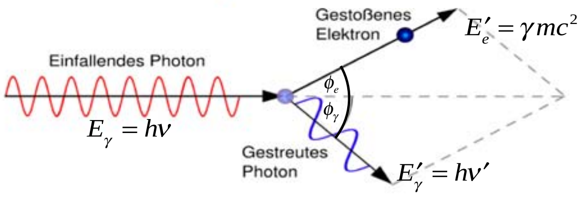
Die klassische Vorstellung stimmt nicht mit dem Experiment überein!

Gestreute Photonen haben eine kleinere Frequenz – d.h. eine längere Wellenlänge

Wieso hat man dies erst 1922 bemerkt?

Die relative Änderung der Wellenlänge $\Delta\lambda/\lambda$ des einfallenden zum gestreuten Photon ist für sichtbares Licht verschwindend klein.
Erst bei Röntgenstrahlung, d.h. bei kleinen Wellenlängen λ, wird $\Delta\lambda/\lambda$ bemerkbar.

Compton-Effekt



Teilchenbild:

Ein Photon der Energie hυ und Impuls hυ/c stösst an einem Elektron. Dabei erfährt das Elektron einen Rückstoss, und das Photon verliert an Energie. D.h. es hat nach dem Stoss eine kleinere Frequenz!

Energie und Impuls des **Elektrons vor der Streuung**

$$E_e = mc^2 \quad \vec{p}_e = (0,0,0)$$

Energie und Impuls des **Photons vor der Streuung**

$$E_\gamma = h\nu \quad \vec{p}_\gamma = \left(\frac{h\nu}{c},0,0\right)$$

Energie und Impuls des **Elektrons nach der Streuung**

$$E'_e = \gamma mc^2 \quad \vec{p}'_e = (\beta\gamma mc\cos\phi_e, \beta\gamma mc\sin\phi_e, 0)$$

Energie des **Photons nach der Streuung**

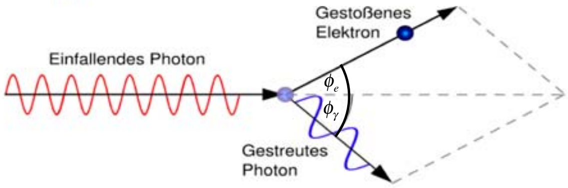
$$E'_\gamma = h\nu' \quad \vec{p}'_\gamma = \left(\frac{h\nu'}{c}\cos\phi_\gamma, \frac{h\nu'}{c}\sin\phi_\gamma, 0\right)$$

Die Compton-Beziehung folgt nun direkt aus Energie und Impulserhaltung:

$$E_e + E_\gamma = E'_e + E'_\gamma$$

$$\vec{p}_e + \vec{p}_\gamma = \vec{p}'_e + \vec{p}'_\gamma$$

Compton-Effekt – Herleitung



Energieerhaltung:

$$E_e + E_\gamma = E'_e + E'_\gamma \quad \Rightarrow \quad mc^2 + h\nu = \gamma mc^2 + h\nu'$$

$$(\gamma - 1)mc^2 = h\nu - h\nu'$$

$$(\gamma + 1)mc^2 = 2mc^2 + h\nu - h\nu'$$

$$(\gamma - 1)(\gamma + 1) = \gamma^2 - 1 = \frac{1}{m^2c^4}[2mc^2(h\nu - h\nu') + (h\nu - h\nu')^2]$$

Impulserhaltung:

$$p_{x,e} + p_{x,\gamma} = p'_{x,e} + p'_{x,\gamma} \quad \Rightarrow \quad 0 + \frac{h\nu}{c} = \beta\gamma mc \cdot \cos\phi_e + \frac{h\nu'}{c} \cdot \cos\phi_\gamma \quad \rightarrow \beta\gamma mc \cdot \cos\phi_e = \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \cdot \cos\phi_\gamma$$

$$p_{y,e} + p_{y,\gamma} = p'_{y,e} + p'_{y,\gamma} \quad \Rightarrow \quad 0 + 0 = \beta\gamma mc \cdot \sin\phi_e + \frac{h\nu'}{c} \cdot \sin\phi_\gamma \quad \rightarrow \beta\gamma mc \cdot \sin\phi_e = -\frac{h\nu'}{c} \cdot \sin\phi_\gamma$$

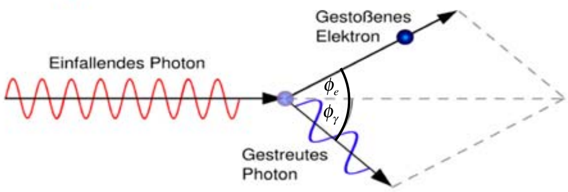
$$p_{z,e} + p_{z,\gamma} = p'_{z,e} + p'_{z,\gamma} \quad \Rightarrow \quad 0 + 0 = 0 + 0$$

$$\beta^2\gamma^2 m^2c^4 \cdot \cos^2\phi_e = (h\nu - h\nu' \cdot \cos\phi_\gamma)^2$$

$$\beta^2\gamma^2 m^2c^4 \cdot \sin^2\phi_e = (h\nu' \cdot \sin\phi_\gamma)^2$$

$$\Rightarrow \beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1 = \frac{1}{m^2c^4}[(h\nu - h\nu' \cdot \cos\phi_\gamma)^2 + (h\nu' \cdot \sin\phi_\gamma)^2]$$

Compton-Effekt – Herleitung



Aus der Energierhaltung folgt:

$$\gamma^2 - 1 = \frac{1}{m^2c^4}[2mc^2(h\nu - h\nu') + (h\nu - h\nu')^2]$$

Aus der Impulserhaltung folgt:

$$\gamma^2 - 1 = \frac{1}{m^2c^4}[(h\nu - h\nu' \cdot \cos\phi_\gamma)^2 + (h\nu' \cdot \sin\phi_\gamma)^2]$$

und somit:

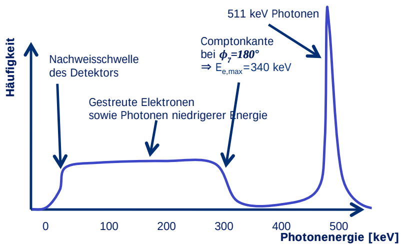
$$2mc^2(h\nu - h\nu') + (h\nu - h\nu')^2 = (h\nu - h\nu' \cdot \cos\phi_\gamma)^2 + (h\nu' \cdot \sin\phi_\gamma)^2$$

$$2mc^2(h\nu - h\nu') + (h\nu)^2 - 2h^2\nu\nu' + (h\nu')^2 = (h\nu)^2 - 2h^2\nu\nu' \cdot \cos\phi_\gamma + (h\nu')^2 \cdot \cos^2\phi_\gamma + (h\nu')^2 \cdot \sin^2\phi_\gamma$$

$$2mc^2(h\nu - h\nu') - 2h^2\nu\nu' = -2h^2\nu\nu' \cdot \cos\phi_\gamma$$

$$(\nu - \nu') = \frac{h\nu\nu'}{mc^2}(1 - \cos\phi_\gamma) \quad \Rightarrow \quad (\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu}) = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi_\gamma) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi_\gamma)}$$

Comptonkante



Im Spektrum gibt es offensichtlich eine höchste Energie bei ca. E_C=340 keV, welche gestreute Elektronen beim Comptoneffekt annehmen können.

Diese ergibt sich gerade dann, wenn der **Streuwinkel ϕ_γ** den Wert **180°** annimmt, d.h. wenn das Photon direkt zurück streut und so das Elektron seinen maximalen Impuls erhält.

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi_\gamma) = hc\left(\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma}\right) = \frac{hc}{m_e c^2}\left(1 - \underbrace{\cos\phi_\gamma}_{-1 \text{ für } \phi_\gamma = 180^\circ}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma}\right) = \frac{2}{m_e c^2}$$

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{2}{m_e c^2} E_\gamma}$$

Energie des gestreuten Photons bei $\phi_\gamma = 180^\circ$

Für die Energie des gestreuten Elektrons gilt: $E'_e = E_e + E_\gamma - E'_\gamma$

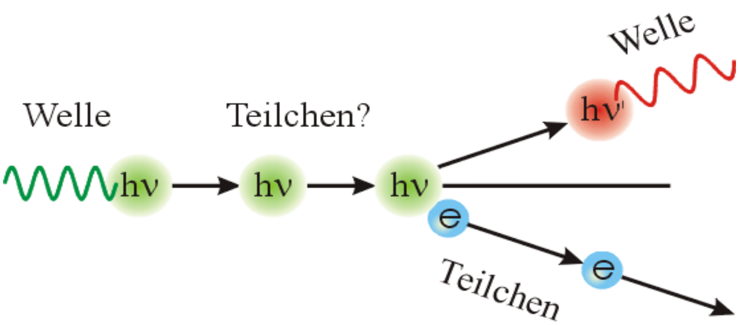
$\Rightarrow$ Kinetische Energie des gestreuten Elektrons: $E'_{e,kin} = E'_e - E_e = E_\gamma - E'_\gamma$

$E_C \equiv$ Compton-Kante = maximale kinetische Energie des gestreuten Elektrons

$$E_C \equiv \left(E_\gamma - E'_\gamma\right)_{\max} = E_\gamma \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{m_e c^2} E_\gamma}\right) \overset{E_\gamma = 511\,\mathrm{keV} = m_e c^2}{=} m_e c^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \rightarrow E_C = \frac{2}{3} m_e c^2 = \frac{2}{3} 511\,\mathrm{keV} = 340.7\,\mathrm{keV}$$

Quanten Mechanik

Teilchen–Welle Dualismus



Teilchen–Welle Dualismus

Photonen (also Lichtquanten) zeigen

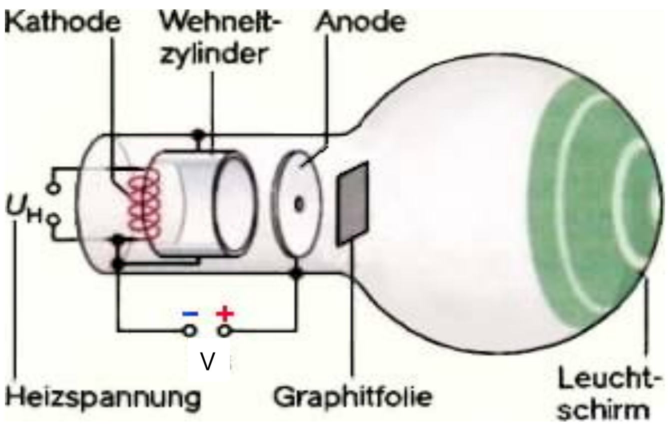
→ **Welleneigenschaften**
  → **Beugung**
  → **Interferenz**

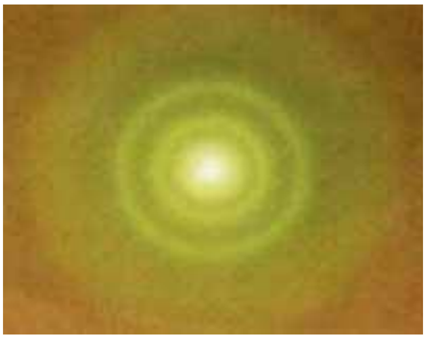
→ **Teilcheneigenschaften**
  → **Photoeffekt**
  → **Comptoneffekt**

Was gilt nun?

Welle oder Teilchen?

Elektronenbeugung

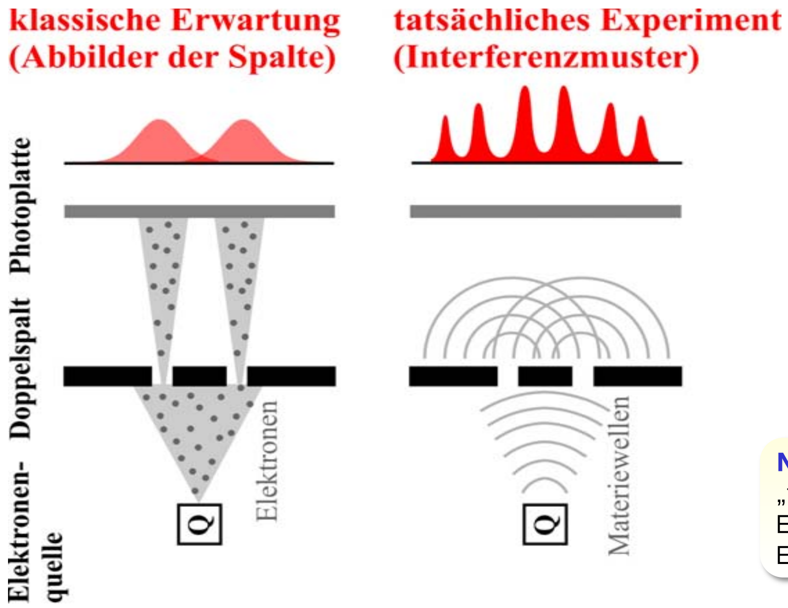




Elektronen der Energie $E_{kin}=eV$ beugen an der Gitterstruktur der Graphitfolie.

Ein typisches Interferenzmuster wird am Leuchtschirm sichtbar.
Dies ist nur möglich, da Elektronen Teilchen-Wellen sind.

Materiewellen



Prince Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie
*15. August 1892 in Dieppe
† 19. März 1987 in Louveciennes

Nobelpreis 1929
„für seine Arbeit über die Entdeckung der Wellennatur von Elektronen"

de Broglie Wellenlänge

In seiner Doktorarbeit schlug de Broglie 1924 in einer rein theoretischen Abhandlung vor, dass nicht nur Photonen, sondern Materie ganz allgemein, dem Teilchen-Wellen Dualismus unterliegt.

Für Photonen gilt: $\lambda_\gamma = \dfrac{h}{p_\gamma}$

Diese Beziehung soll nun für alle Materie gelten: $\lambda = \dfrac{h}{p}$

De Broglie Wellenlänge

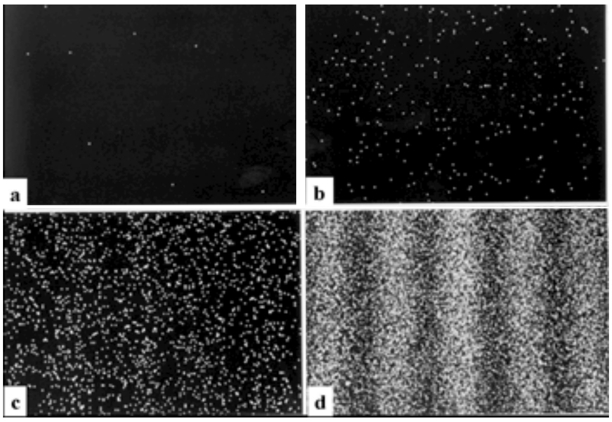
De Broglie´s Vorschlag wurde mit Skepsis in der Fachwelt aufgenommen:

„Diese jungen Leute nehmen es doch gar zu leicht, alte physikalische Begriffe beiseite zu setzen!" ***Lorentz***

De Broglie antworte auf eine skeptische Bemerkungen von Paul Langevin's bei der Verteidigung seiner Doktorarbeit:
„Vous êtes probablement un peu étonné par la nouveauté de mes idées"

1927 und 1928 wurden Elektronenwellen experimentell Nachgewiesen
1929 erhiele de Broglie den Nobelpreis für seine „kühne Idee"

Elektroneninterferenz

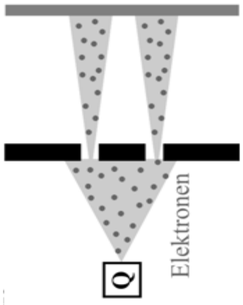


Die Interferenzerscheinung soll nun auch bei kleiner Intensität untersucht werden.

Die Intensität des Elektronenstrahls soll dabei so klein sein, dass jeweils **nur gerade ein einziges Elektron** auf den Doppelspalt zu fliegt.

Obwohl nur einzelne Elektronen durch den Doppelspalt fliegen, erscheint auch dann nach genügend langer Zeit ein **Interferenzmuster**.

Die einzig mögliche Schlussfolgerung ist, dass **jedes einzelne Elektron mit sich selbst interferiert!**



a) Am Anfang haben erst einige Elektronen den Doppelspalt passiert
b) und c) nach einiger Zeit
d) ...schliesslich wird ein Interferenzmuster deutlich erkennbar.

Beispiele zur de Broglie Wellenlänge λ=h/p

Bestimme die de Broglie Wellenlänge eines Massenpunkts bei gegebener kinetischen Energie:

$$\left.\begin{array}{l} E = mc^2 + E_{kin} \\ E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\cancel{m^2c^4} + 2mc^2E_{kin} + E_{kin}^2}_{E^2} - p^2c^2 = \cancel{m^2c^4}$$

$$p^2c^2 = 2mc^2E_{kin} + E_{kin}^2$$

$$p = \sqrt{2mE_{kin} + E_{kin}^2/c^2}$$

Impuls eines Massepunkts, bei gegebener kinetischer Energie.

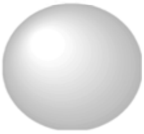
Bestimme die de Broglie Wellenlänge eines 100 eV Elektron

$$\left.\begin{array}{l} m_e = 511\ \text{keV}/c^2 \\ E_{\text{kin}} = 100\ \text{eV} \end{array}\right\} \Rightarrow p = \sqrt{2\cdot 511\times 10^3 \cdot 100 + \underbrace{100^2}_{\approx 0}}\ \text{eV/c}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4.135669\times 10^{-15}\,\text{eVs}}{\sqrt{2\cdot 511\times 10^3\cdot 100}\,\text{eV}\Big/ 299792458\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1.2\times 10^{-10}\,\text{m}$$

Typischer Abstand zwischen Atomen in Kristallen

Beispiele zur de Broglie Wellenlänge



Die de Broglie Wellenlänge eines Ping-Pong Balls:

Ein Ping-Pong Ball hat eine Masse m=2.7g bei einem Radius R=2cm.
Ein geübter Spieler erreicht beim Anschlag eine Geschwindigkeit υ=180 km/h.

Damit ergibt sich für den Impuls *p* des Ping-Pong Balls:

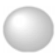
$$p = m\upsilon = 2.7 \times 10^{-3} \cdot 180 \times \frac{10^3}{3600}\,\mathrm{kgms^{-1}}$$

und schliesslich für dessen Wellenlänge λ:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.626076 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2.7 \times 10^{-3} \cdot 180 \times \frac{10^3}{3600}\,\mathrm{kgms^{-1}}} = 4.9 \times 10^{-33}\,\mathrm{m}$$

Eine Wellenlänge von 4.9×10^{-33} m ist unmessbar klein!
Obwohl der Ping-Pong Ball prinzipiell eine Wellenlänge hat, sind seine Welleneigen-schaften nicht messbar. Er verhält sich entsprechend klassisch.

Beispiele zur de Broglie Wellenlänge



Die de Broglie Wellenlänge eines Staubkorns:

Ein Staubkorn der Masse m=1mg bewege sich äusserst langsam mit υ=1 mm/Jahr.

Damit ergibt sich für den Impuls *p* des Staubkorns:

$$p = m\upsilon = 1 \times 10^{-6} \cdot 1 \times \frac{1 \times 10^{-3}}{365 \cdot 24 \cdot 3600}\,\mathrm{kgms^{-1}}$$

und schliesslich für dessen Wellenlänge λ:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.626076 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{1 \times 10^{-6} \cdot 1 \times \frac{1 \times 10^{-3}}{365 \cdot 24 \cdot 3600}\,\mathrm{kgms^{-1}}} = 2 \times 10^{-17}\,\mathrm{m}$$

Eine Wellenlänge von 2×10^{-17} m entspricht einem 50tel Protondurchmesser. Solch kleine Grössen können mit Teilchenbeschleunigern gemessen werden.

Makroskopische Objekte verhalten sich trotz ihrer Wellennatur *klassisch*.

Born´sche Interpretation

Der scheinbare Widerspruch des Teilchen-Wellen Dualismus wurde von Max Born geklärt.

Wellenbild und Teilchenbild sind nicht im Widerspruch zueinander – sondern ergänzen sich gegenseitig.

Wahrscheinlichkeitsinterpretation von Max Born
Ein **Quantenobjekt**, wird durch eine **Wellenfunktion** beschrieben und breitet sich mit Welleneigenschaften aus.

Des Weiteren erklärt Born das **Quadrat der Amplitude der Wellenfunktion** als die **Wahrscheinlichkeit das Quantenobjekt am Ort x zur Zeit t zu detektieren.**

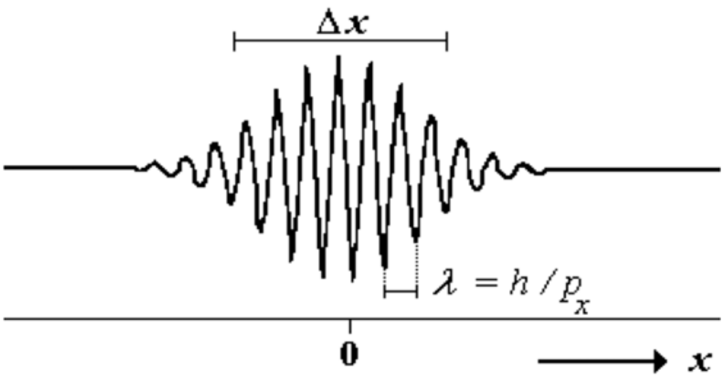
So kann zwar **nicht der genaue Aufenthaltsort** des Teilchens, aber die so genannte **Wahrscheinlichkeitsdichte als Funktion von Ort x und Zeit t vorhergesagt werden.**

Max Born
*11. Dezember 1882 in Breslau
† 5. Januar 1970 in Göttingen

Nobelpreis 1954
„für seine Arbeit über die statistische Deutung der Wellenfunktion“

Quanten Mechanik

Heisenberg´sche Unschärfe Relation

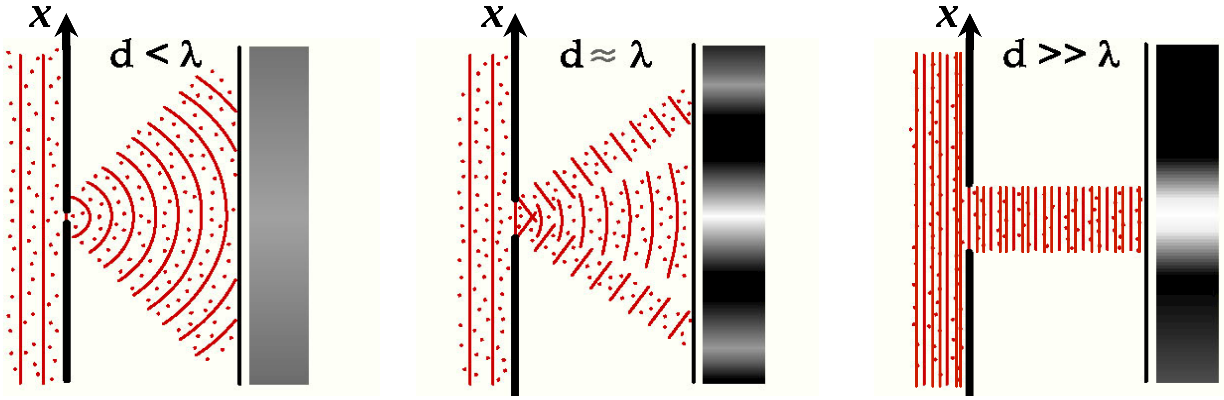


Ein Wellenpaket ist eine räumlich (und zeitlich) begrenzte Welle.

Die Eigenschaften von Quantenobjekten, d.h. Energie, Impuls, Wellenlänge, Interferenzerscheinungen, sowie Beugung von Teilchen oder Materiewellen lassen sich so als Eigenschaften von Wellenpakten erklären.

Die Heisenberg´sche Unschärferelation

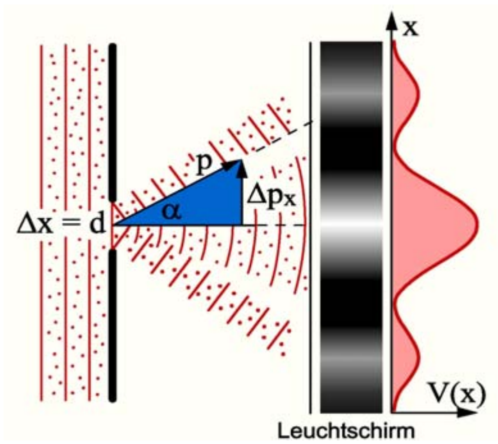
Bei einem Quantenobjekt (Teilchenwelle) sind Ort und Zeit nicht gleichzeitig exakt bestimmbar.
Dies wird beim Durchlaufen einer Teilchenwelle mit der Wellenlänge λ durch einen Spalt der Breite d ersichtlich.



Läuft eine Welle durch einen Spalt misst man so auch den Ort x wo die Welle den Spalt durchläuft → Ortsmessung.

Die Ortsmessung x hat einen Einfluss auf die Ausbreitung der Teilchenwelle nach dem Spalt → Die Ortsmessung beeinflusst den Impuls p_x der Teilchenwelle.

Heisenberg´sche Unschärferelation



Die **Spaltgrösse d** definiert die **Unschärfe** mit der die **x-Koordinate** des Quantenobjekts (Elektron, Photon,...) bestimmt wird:

$$\Delta x = d$$

Dabei ändert sich der Impulsvektor durch Beugung am Spalt:

$$\Delta p_x = p \sin\alpha$$

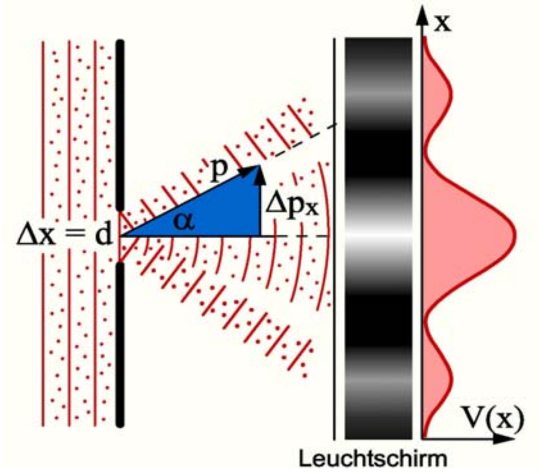
Aus der Optik (Wellenlehre) wissen wir, dass bei Beugung einer ebenen Welle mit der Wellenlänge λ an einem Spalt der Breite d das erste Minimum auftritt bei:

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

Die Impulsunschärfe ist mindestens so gross wie das erste Minimum:

$$\frac{\Delta p_x}{p} \geq \sin\alpha = \frac{\lambda}{\Delta x}$$ und somit folgt: $$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq p \cdot \lambda = h$$

Heisenberg´sche Unschärferelation



$$\underbrace{\Delta p_x}_{\text{Impulsunschärfe}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{Ortsunschärfe}} \geq h$$

Dies ist eine qualitative Herleitung der Heisenberg´schen Unschärferelation.

Eine rigorose quantenmechanische Herleitung liefert eine etwas kleinere Schranke.

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

wobei $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ die reduzierte Planck´sche Konstante ist.

Das Produkt aus **Ortsunschärfe Δx** und **Impulsunschärfe Δp_x** ist endlich, daher können nicht beide gleichzeitig Null sein. Somit können bei einem Quantenobjekt (Teilchenwelle) Ort und Zeit nicht gleichzeitig exakt bestimmt werden.

Werner Karl Heisenberg

Je **kleiner** die **Ortsunsicherheit** Δx eines Quantenobjekts (Teilchen/Welle) ist, desto **größer** ist seine **Impulsunschärfe** Δp_x hinter dem Spalt.

Das Produkt der beiden Größen, $\Delta x \cdot \Delta p_x$, beträgt zu jedem Zeitpunkt mindestens $\frac{1}{2}\hbar$.

Es ist also nicht möglich, gleichzeitig den Ort und den Impuls (somit auch die Geschwindigkeit) eines Quantenobjekts beliebig genau zu bestimmen.

Werner Karl Heisenberg
*5. Dezember 1901 in Würzburg
† 1. Februar 1976 in München

Die **Heisenberg´sche Unschärferelation** lässt sich **auf weitere Messgrössen verallgemeinern**. Dem entsprechend gilt:

Es ist nicht möglich, zwei Messgrößen eines Quanten-objekts, deren Produkt die Dimension einer Wirkung [Js] hat, gleichzeitig exakt zu bestimmen.

Dies gilt zBsp für **Ort×Impuls** oder **Energie×Zeit**.

Nobelpreis 1932
„für seine Arbeit über die Erschaffung der Quanten-mechanik“

Komplementäre Grössen

Messgrössen heissen komplementär zueinander, wenn sie nicht gleichzeitig exakt bestimmbar sind.

Beispiele komplementärer Grössen sind:

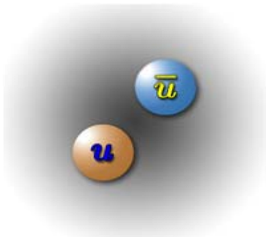
- **Ort** (x,y,z) und **Impuls** (p_x,p_y,p_z) sind in x-, y-, und z-Richtung jeweils komplementär zueinander.
- **Energie** E und **Zeit** t sind komplementär.
- Die Komponenten des **Drehimpulsvektors** (s_x,s_y,s_z), wobei s für **Spin** steht, sind paarweise zueinander komplementär.
  Mit Spin ist der Eigendrehimpuls eines Quantenobjekts gemeint. Der Elektronenspin spielt in der Atomphysik und in der Chemie eine wichtige Rolle.

Entsprechend gelten folgende Unschärferelationen:

Ort-Impuls: $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \tfrac{1}{2}\hbar \qquad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \tfrac{1}{2}\hbar \qquad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \tfrac{1}{2}\hbar$

Energie-Zeit: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \tfrac{1}{2}\hbar$

Spin: $s_x \cdot s_y \geq \tfrac{1}{2}\hbar s_z \qquad s_y \cdot s_z \geq \tfrac{1}{2}\hbar s_x \qquad s_z \cdot s_x \geq \tfrac{1}{2}\hbar s_y$



Beispiel π^0 Zerfall

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

π^0 (Pion) ist ein Meson, es besteht aus einem **Up-Quark** und einem **Anti-Up-Quark** sowie auch aus einem **Anti-Down-Quark** und einem **Down-Quark**.

Ein π^0 zerfällt in kurzer Zeit in zwei Photonen

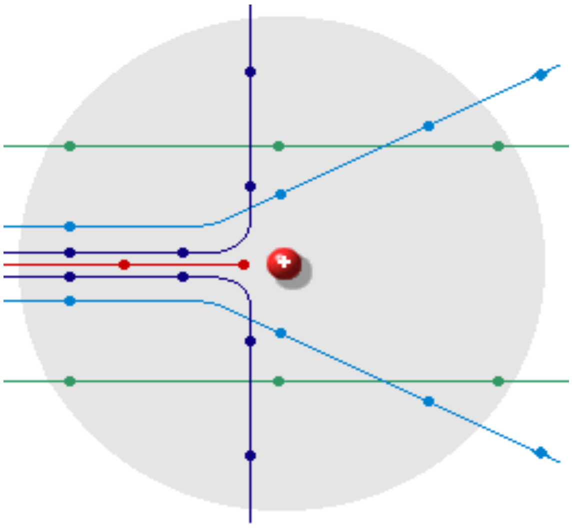
Masse m	m_{π^0} = **134.97 MeV / c^2**
Lebensdauer τ	τ_{π^0} = **8.4×10^{-17}s**
Lebensdauer × Lichtgeschwindigkeit	$c\tau_{\pi^0}$ = **25.1 nm**

Die Masse des π^0 , d.h. seine Ruheenergie $E=mc^2$, kann nur während seiner Lebensdauer τ bestimmt werden. Daher folgt eine Unschärfe bei der Bestimmung der Pion Masse von:

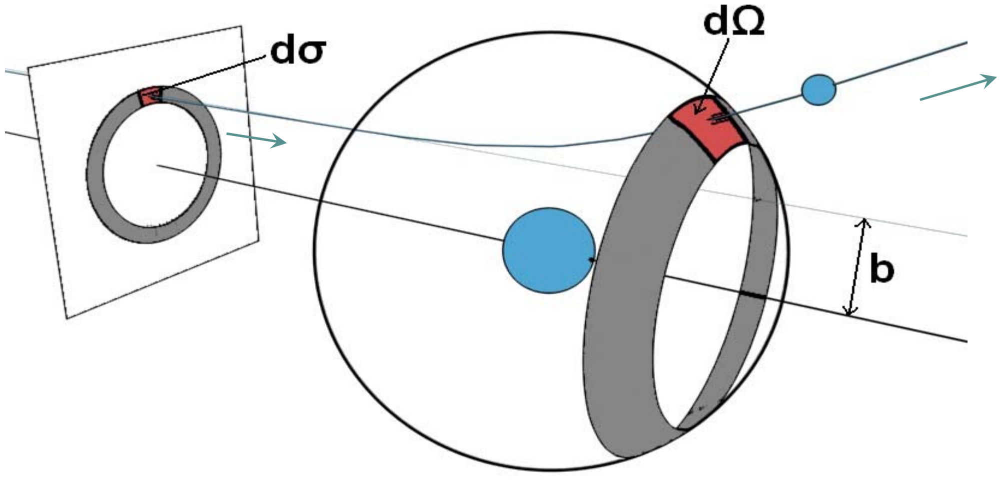
$$\Delta m_{\pi^0} = \frac{\Delta E_{\pi^0}}{c^2} \geq \frac{\hbar}{c^2\, 2\, \underbrace{\Delta t}_{\tau_{\pi^0}}} = \frac{4.135669\times10^{-15}\mathrm{eVs}}{2\pi\cdot c^2\cdot 2\cdot 8.4\times10^{-17}\mathrm{s}} = 4\,\frac{\mathrm{eV}}{c^2}$$

Atomphysik

Streuexperimente zur Strukturbestimmung
Struktur der Atome



Streuexperimente
Strukturbestimmung



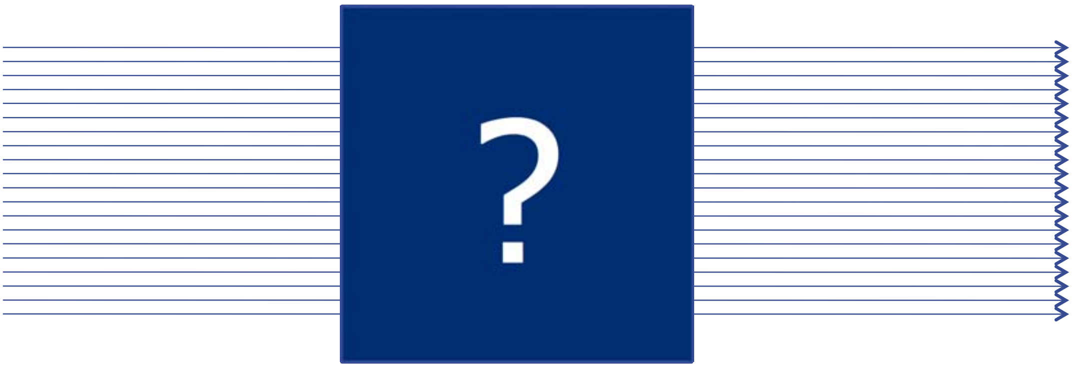
$d\sigma$ Flächenelement [m^2] durch das der einlaufende Teilchenstrahl eintritt.

$d\Omega$ Raumwinkelelement durch welches der gestreute Teilchenstrahl austritt.

b Streuparameter [m] Abstand des einlaufenden Teilchenstrahls von der Streuachse.

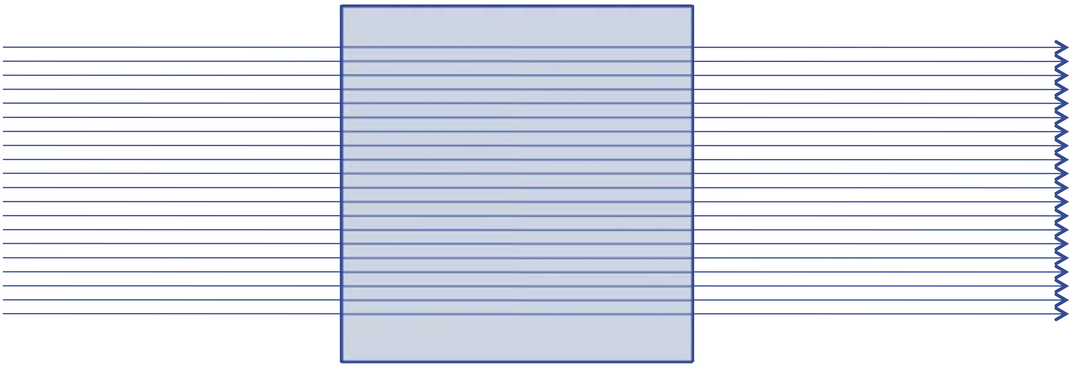
Streuexperimente

Teilchenstrahlen fliegen von Links kommend in eine Black-Box, und kommen Rechts wieder heraus.
Was für eine Struktur könnte in dieser Black-Box sein?



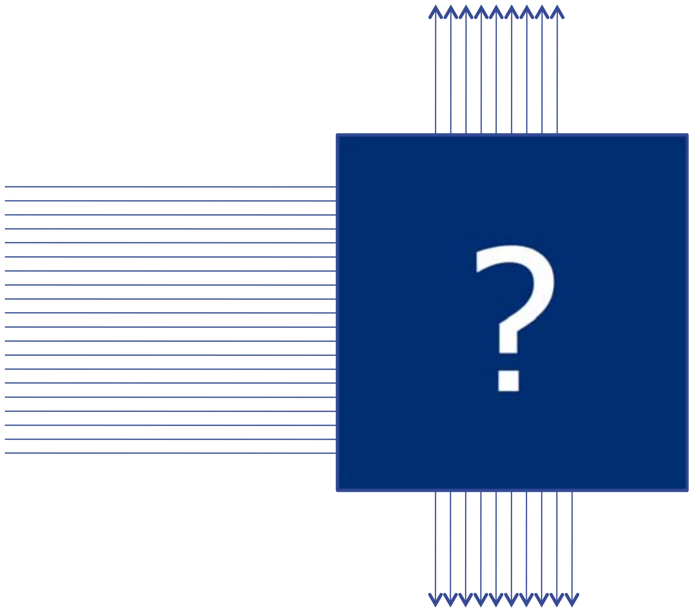
Streuexperimente

Die Teilchenstrahlen fliegen ohne zu streuen durch die Black-Box hindurch.
Es ist somit keine tiefer liegende Struktur im Innern der Black-Box erkennbar.



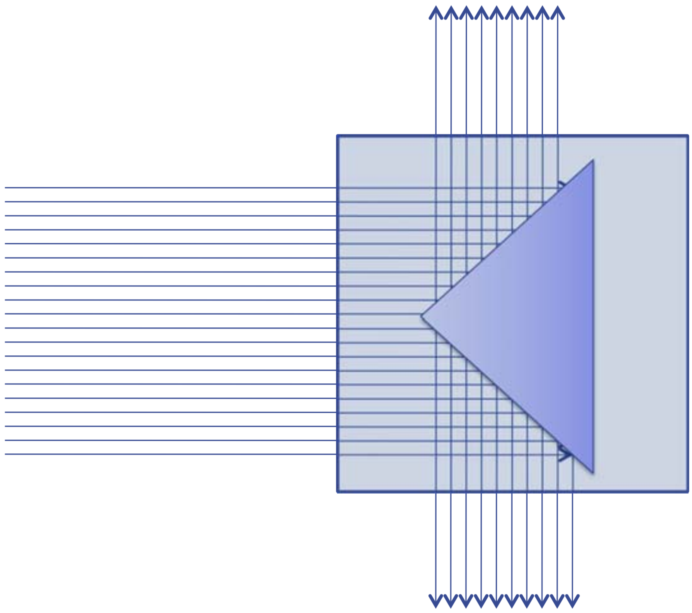
Streuexperimente

Teilchenstrahlen fliegen von Links kommend in eine Black-Box, und werden je zur Hälfte nach oben und nach unten gestreut.



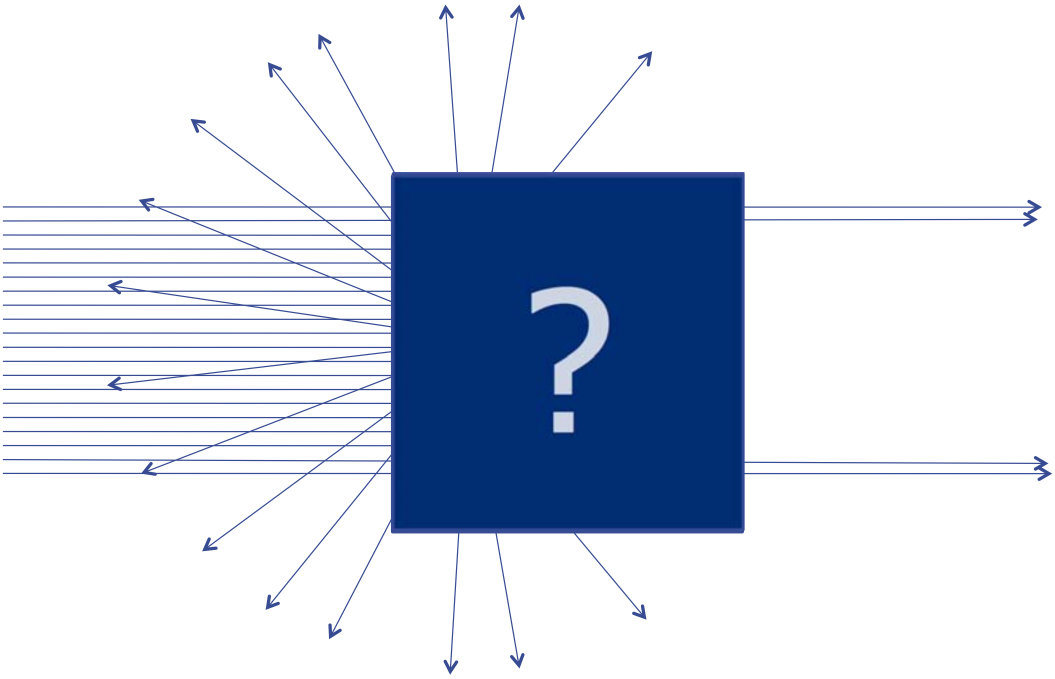
Streuexperimente

Ein rechter Winkel bewirkt, dass die Teilchenstrahlen nach oben und nach unten abgelenkt werden.



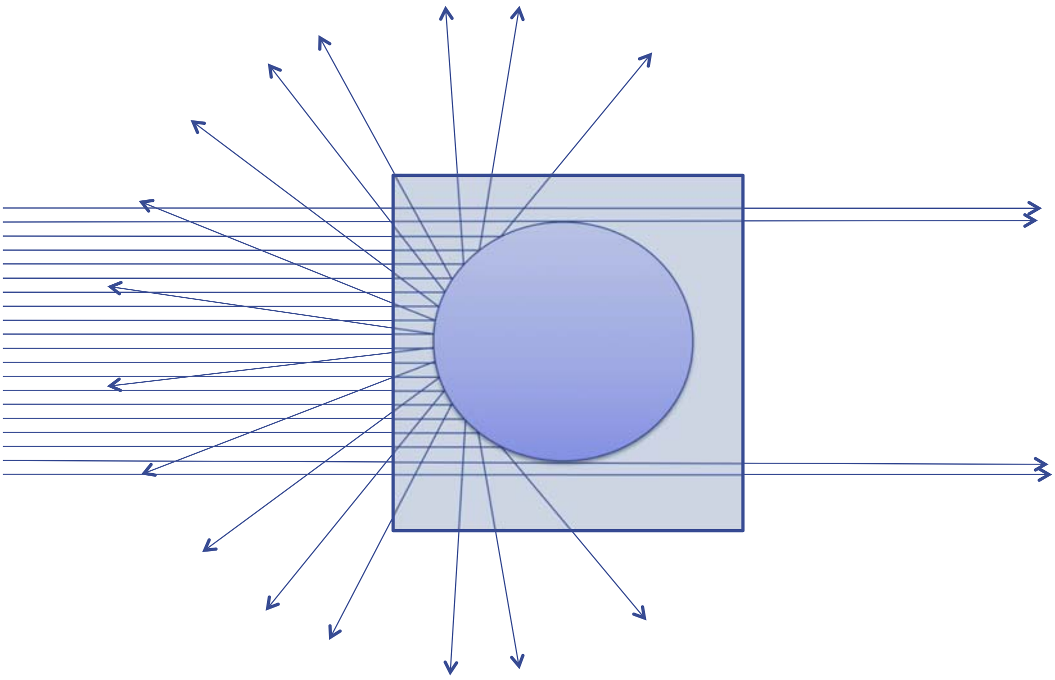
Streuexperimente

Teilchenstrahlen fliegen von Links kommend in eine Black-Box, und werden symmetrisch in alle Richtungen zurückgestreut.



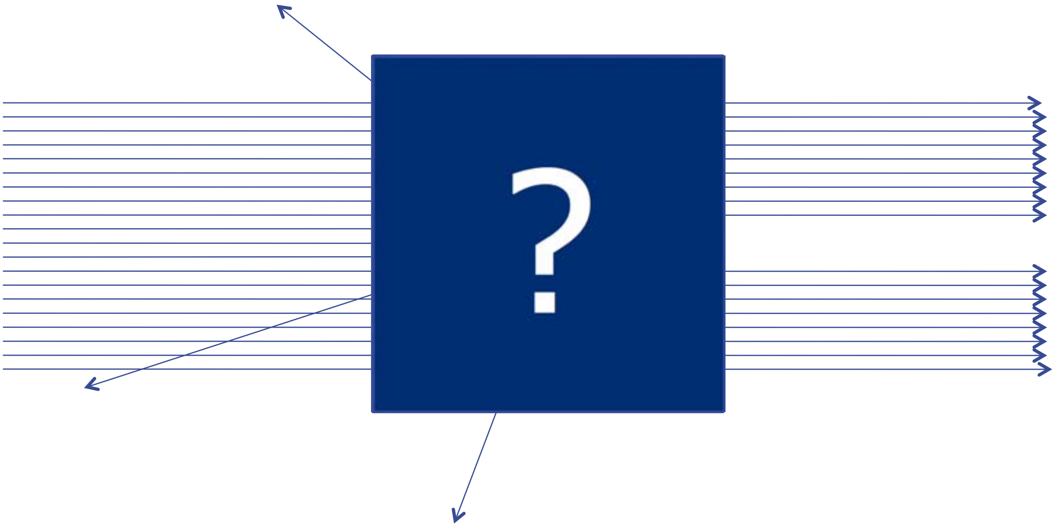
Streuexperimente

Eine Sphäre bewirkt eine symmetrische Rückstreuung in alle Richtungen.



Streuexperimente

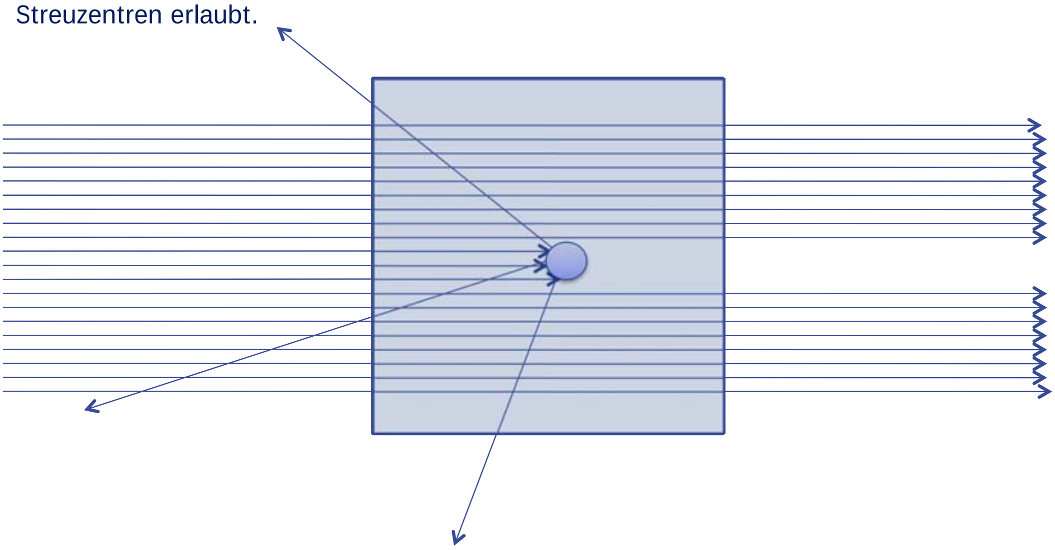
Teilchenstrahlen fliegen von Links kommend in eine Black-Box, und einige wenige werden symmetrisch in alle Richtungen zurückgestreut.



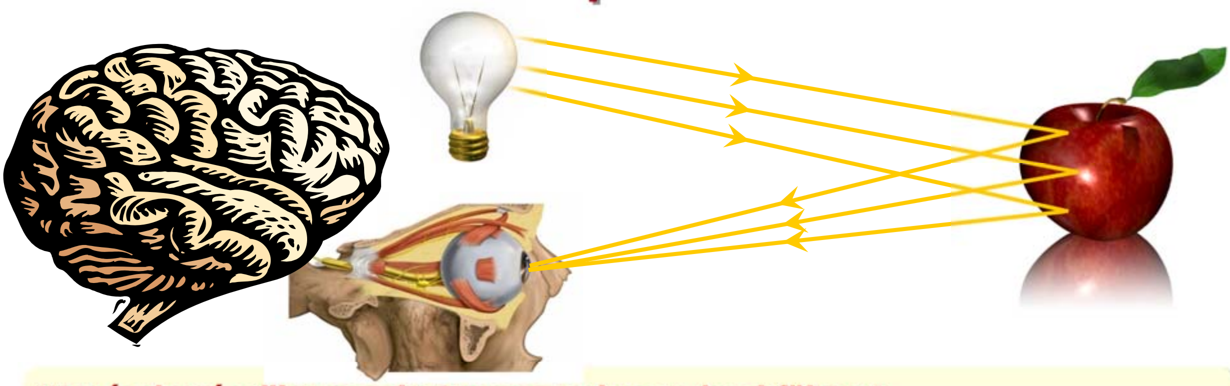
Streuexperimente

Auch hier bewirkt eine Sphäre die symmetrische Rückstreuung in alle Richtungen. Allerdings ist ihr Radius wesentlich kleiner als im vorherigem Fall.

Ganz allgemein gilt, dass eine genaue Vermessung der Winkelverteilung der gestreuten Teilchenstrahlen Rückschlüsse über Art und Grösse der der Streuung zugrunde liegenden Streuzentren erlaubt.



Streuexperimente



Wer ´sehen´ will muss ein Streuexperiment durchführen!

- Photonen einer Lichtquelle streuen an einem Objekt.
- Die gestreuten Photonen müssen mit einem Detektor gemessen werden.
  - Ein **Auge** ist ein hervorragender **Detektor für Photonen mit Wellenlängen 380-780nm**.
- Die **Messgrössen** dieser Photonen müssen genau analysiert werden:
  - Messgrössen sind: **Impuls** (p_x, p_y, p_z), **Intensität** (Anzahl Photonen pro Sekunde), sowie **Zeit** t.
  - **Energie, Wellenlänge** und **Frequenz** ergeben sich alle aus dem Impuls: $\lambda=h/p$, $\nu=c/\lambda$, $E=h\nu=cp$.
- Damit können die Eigenschaften **Grösse, Distanz, Form und Oberflächenstruktur** des Objekts berechnet werden. **Farbe** ist eine Kodierung des Photonimpulses: Jede Energie und Wellenlänge entspricht einer Farbe.
- Unser **Gehirn** vollbringt diese gewaltige Leistung, welche mittels einer **Online-Rekonstruktion der Messdaten** ein **Bild in Echtzeit** erzeugt.

Auflösungsvermögen

Die **Wellenlänge λ der Strahlteilchen** ist ein Mass dafür wir klein ein **Struktur** gerade noch sein darf um diese gerade noch zu erkennen.

Mit **sichtbaren Licht λ∈ [380 nm, 780 nm]** können keine Strukturen unterhalb von ein paar hundert Nanometer Durchmesser sichtbar gemacht werden.

Atome haben einen Durchmesser von ca. **0.1 nm** und sind mit Lichtmikroskopen prinzipiell **nicht sichtbar**.

Geladene Teilchen können mit **elektrischen Feldern** beschleunigt werden, und diese erreichen so einen **hohen Impuls** p.
Entsprechend $\lambda=h/p$ bedeutet ein hoher Impuls eine **kleine de Broglie Wellenlänge** und damit können **kleine Strukturen aufgelöst** werden.

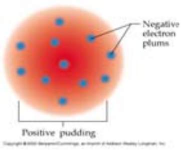
$$E_{\mathrm{kin}} = 1.5\,\mathrm{eV} \qquad m_e = 511'000\,\mathrm{eV\,c^{-2}}$$

$$p = \sqrt{2mE_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{kin}}^2/c^2} = \sqrt{2\cdot 511'000\cdot 1.5 + 1.5^2}\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{c}}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4.135\ 667\ 516\times 10^{-15}\,\mathrm{eV\,s}\cdot 299\ 792\ 458\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{\sqrt{2\cdot 511'000\cdot 1.5+1.5^2}\ \mathrm{eV}}$$

$$= 1\times 10^{-9}\ \mathrm{m}$$

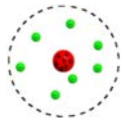
Bestimmen der Struktur der Atome



Sir **Joseph John Thomson**
* 18. Dezember 1856
Manchester, England
† 30. August 1940
Cambridge, England

Nobelpreis 1906
"als Anerkennung des großen Verdienstes, den er sich durch seine theoretischen und experimentellen Untersuchungen über den Durchgang der Elektrizität durch Gase erworben hat"

Entdecker des Elektrons



Lord Baron Ernest Rutherford
* 30 .August 1871
Brightwater, New Zealand
† 19. October 1937
Cambridge, England

Nobelpreis 1908
"für seine Untersuchungen über den Zerfall der Elemente und die Chemie der radioaktiven Stoffe"

Entdecker des Atomkerns

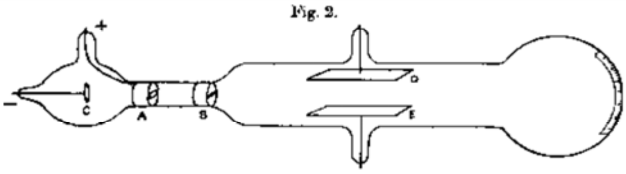
1894-1897 Entdeckung des Elektrons

Cathode Rays *Philosophical Magazine*, 44, 293 (1897)

Messung der Elektronen Masse $m_e \approx \frac{m_H}{1836}$

"Could anything at first sight seem more impractical than a body which is so small that its mass is an insignificant fraction of the mass of an atom of hydrogen?" (J.J. Thomson)

Fig. 2.



Kathodenstrahl Röhre: Thomson's Elektronen Beschleuniger

Atome sind keine elementare Teilchen

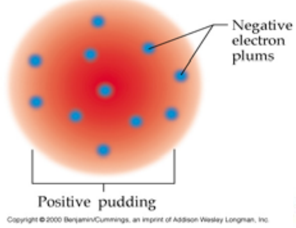
Thomson's Atom Modell ähnelt einem Pudding (Gugelhopf):
- Positiv elektrisch geladene Kugel (Gugelhopf)
- Negativ geladene Elektronen gleichmässig verteilt (Rosinen)
- Radius ~ 10^{-8} cm
- **Elektronen sind Teilchen mit stets gleicher Masse und Ladung**

Joseph J. Thomson

* 18. Dezember 1856 Manchester
† 30. August 1940 in Cambridge

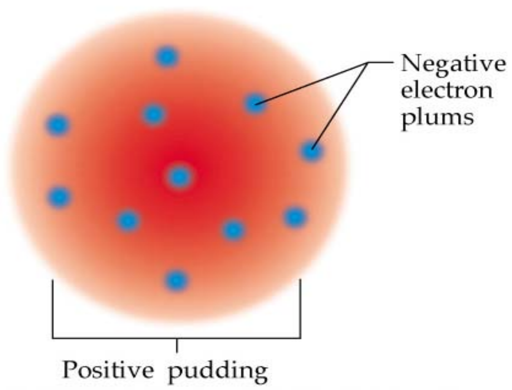
1906 Nobelpreis
„für seine Arbeit über die elektrische Leitfähigkeit von Gasen"

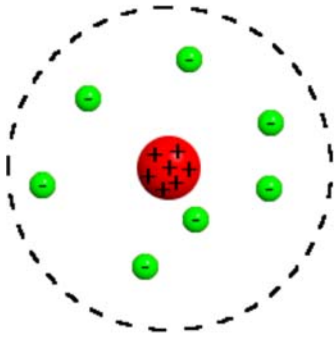
Thompson plum pudding model of the atom



Bestimmen der Struktur der Atome

Eine der wichtigsten Fragen um 1900 war, wie Ladung und Masse im Atom verteilt sind.



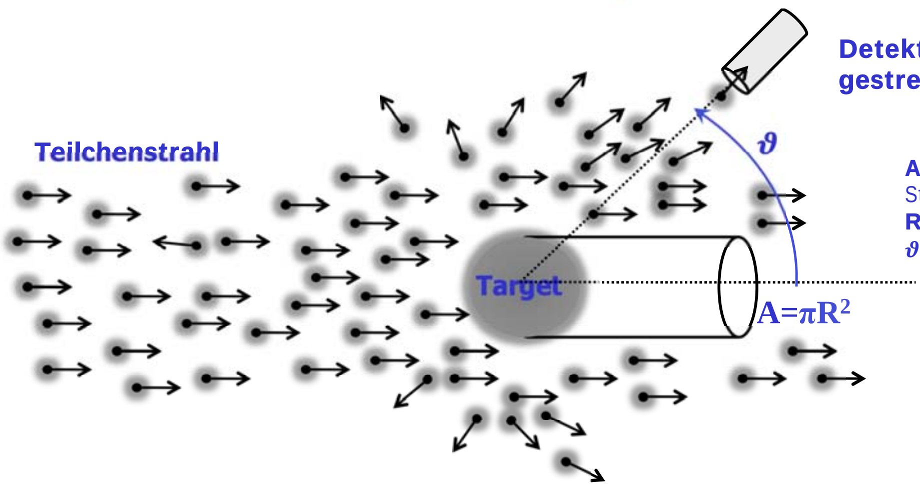


J.J. Thomson stellte sich um 1900 das Atom als einen positiv geladenen Gugelhopf (plum pudding) vor, mit negativ geladenen Elektronen (plums) verteilt darin.

Ernest Rutherford verwarf Thomson´s Idee um 1906. Er bemerkte, dass das Atom einen harten schweren Kern hat mit darum herum verteilten Elektronen.

Rutherford konnte diese Frage mit Hilfe seines berühmten Streuexperiments klären, und so die innere Struktur von Atomen experimentell zugänglich machen.

Streuexperiment



Detektor zum Nachweis gestreuter Teilchen

A ist die **Frontfläche** des Streuzentrums (Target);
R der dazugehörige Radius und
ϑ der Streuwinkel.

Bei einem **Streuexperiment** misst man die **Anzahl der Teilchen** die unter einem **Winkel ϑ** streuen und im Detektor nachgewiesen werden.

Misst man über genügend lange Zeit viele gestreute Teilchen erhält man so die **Wahrscheinlichkeit** dafür, dass ein Teilchen **unter einem bestimmten Winkel ϑ streut**.

Diese **Wahrscheinlichkeitsverteilung** kann für verschiedenen Modellannahmen (Plum-Pudding oder harter Kern) **berechnet** werden und dann mit den **experimentellen Daten verglichen** werden.

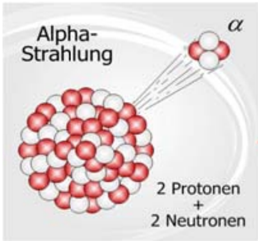
Rutherford´s Experiment – 1906

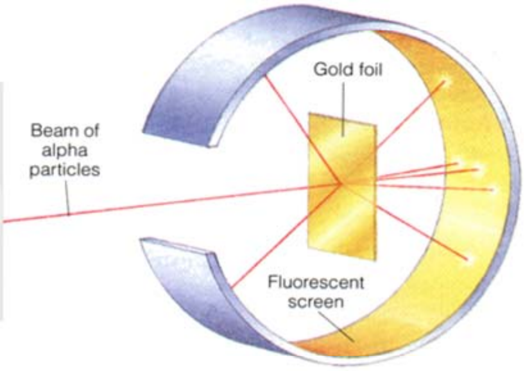
Rutherford´s geniale Idee bestand darin, Alpha-Teilchen an Goldatomen zu streuen.

α-Teilchen (Alpha-Teilchen) sind Kerne von Helium Atomen.

Sie bestehen aus **2 Protonen** und **2 Neutronen**.

Entsprechend sind sie **2-fach positiv geladen** und haben eine **Masse von ca. 4 GeV / c²**.

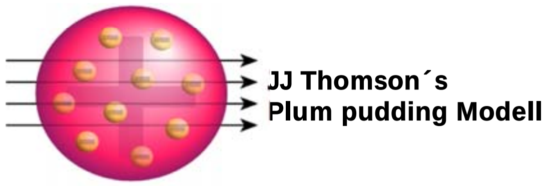


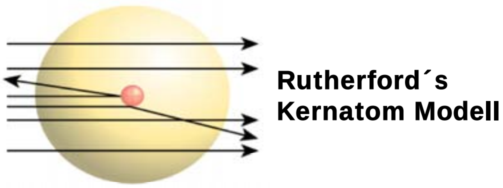


Ein **Streuexperiment mit α-Teilchen**, die **an Goldatomen** gestreut werden, ermöglicht die **Struktur** von Goldatomen bestimmen.

Damit lässt sich experimentell klären, ob **JJ Thomson´s Plum pudding Modell**,

oder doch eher **Rutherford´s Kernatom Modell** richtig ist.

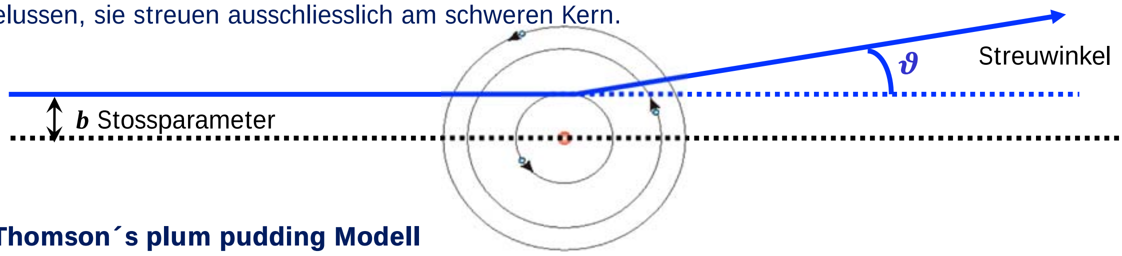




Streuung von α-Teilchen an Atomen

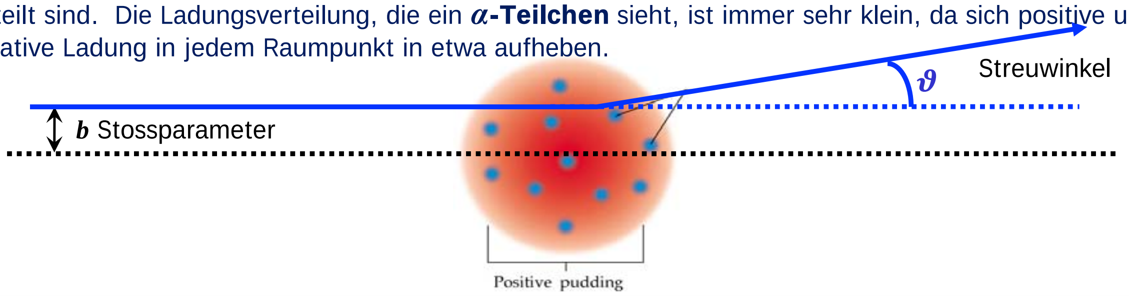
Rutherford´s Kernatom Modell

Das Atom besteht aus einem kleinen, schweren, positiv geladener Kern, leichte negativ geladene Elektronen bewegen sich in weitem Abstand vom Kern. **α-Teilchen** lassen sich nicht durch die leichten Elektronen beelussen, sie streuen ausschliesslich am schweren Kern.



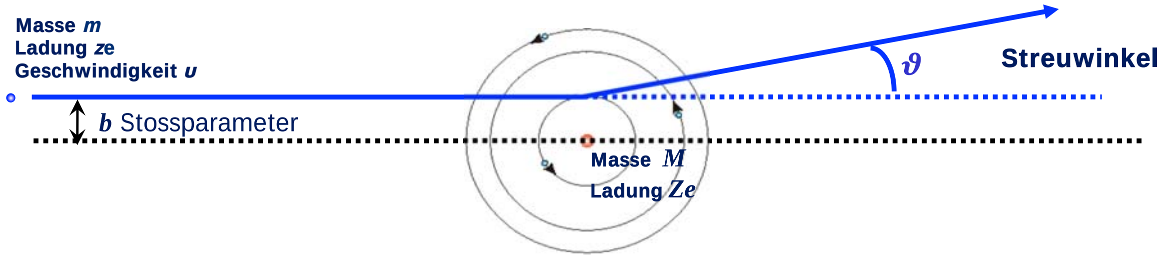
JJ Thomson´s plum pudding Modell

Die positive Ladung ist über das ganze Atom verteilt, wobei die negativen Elektronen darin gleichmässig verteilt sind. Die Ladungsverteilung, die ein **α-Teilchen** sieht, ist immer sehr klein, da sich positive und negative Ladung in jedem Raumpunkt in etwa aufheben.



In beiden Modellannahmen streuen die Teilchen man erhält **aber verschiedene Winkelverteilungen**.
Im folgenden wollen wir Rutherford´s Modell genauer betrachten.

Winkelverteilung der gestreuten Teilchen



Die **Streuteilchen** haben eine **Masse *m***, eine **Ladung *ze***, und fliegen mit einer **Geschwindigkeit u** in Richtung **Atomkern**. Dieser hat die **Masse *M***, die **Ladung *Ze*** und befindet sich **in Ruhe**.
Wobei **e** die **Elementarladung** ist. Weiter wird angenommen, dass der Kern sei sehr viel schwerer ist als das streuende Teilchen ***M≫ m***.

Die Wechselwirkung sei einzig und alleine eine **Coulomb Wechselwirkung**: $F_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zZe^2}{r^2}$

Damit lässt sich der **Streuparameter b** als Funktion des **Streuwinkels ϑ** berechnen. Diese Rechnung ist nicht ganz leicht, so dass hier nur das Resultat gezeigt ist:

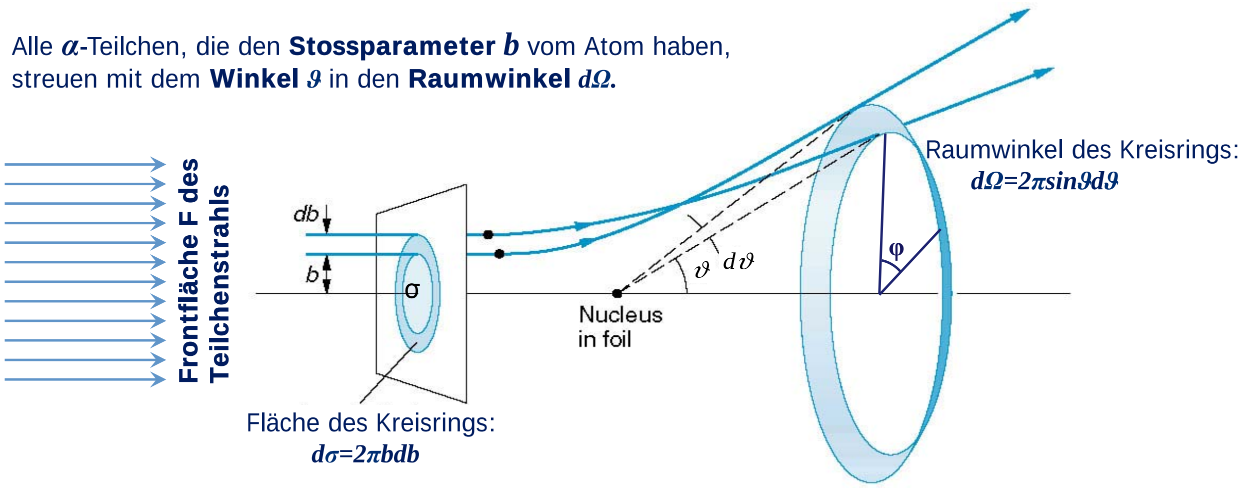
$$b = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m\upsilon^2}\cot\left(\vartheta/2\right)$$

Winkelverteilung

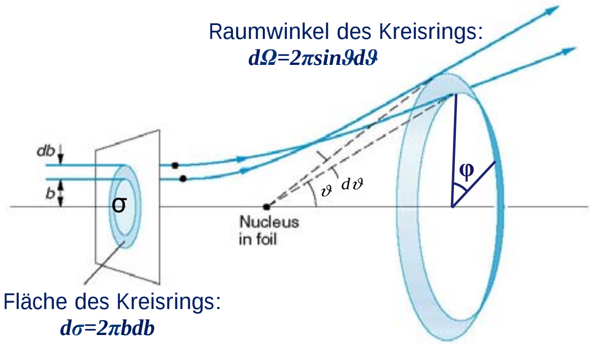
Pro Sekunde treffen N **α-Teilchen** von links kommend auf ein **Streuzentrum** (in unserem Fall der Atomkern)**,** dessen **Querschnittsfläche σ** gleichmässig ausgeleuchtet wird: $dN/d\sigma=N/F$**,** wobei F die **Frontfläche** des **Teilchenstrahls** ist.

Experimentell misst man, wie viele α-Teilchen pro Sekunde in den Raumwinkel $d\Omega=2\pi\sin\vartheta d\vartheta$ streuen. Das heisst, man misst $dN/d\Omega$.

Alle α-Teilchen, die den **Stossparameter b** vom Atom haben, streuen mit dem **Winkel ϑ** in den **Raumwinkel $d\Omega$.**



Winkelverteilung



Stossparameter b bei gegebenem Streuwinkel ϑ:

$$b=\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot mv^2}\cot\left(\vartheta/2\right)$$

Für die Ableitung $\frac{db}{d\vartheta}$ gilt:

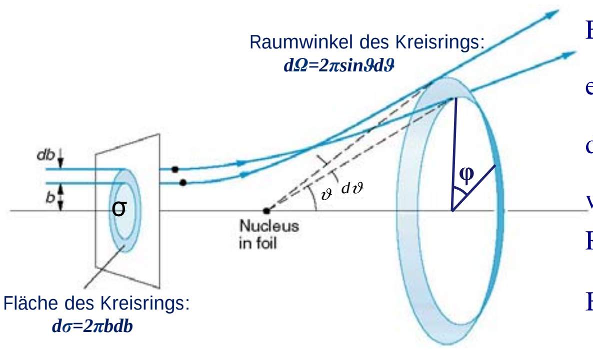
$$\frac{db}{d\vartheta}=\frac{-zZe^2}{8\pi\varepsilon_0\cdot mv^2}\frac{1}{\sin^2\left(\vartheta/2\right)}$$

Die Anzahl Teilchen die mit dem Winkel ϑ pro Sekunde in das Raumwinkelelement dΩ fliegen:

$$\frac{dN}{d\Omega}=\underbrace{\frac{dN}{d\sigma}}_{\frac{N}{F}}\cdot\underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega}}_{\text{Differentieller Wirkungs-querschnitt}}=\frac{N}{F}\cdot\left|\frac{2\pi b db}{2\pi\sin\vartheta d\vartheta}\right|=\frac{N}{F}\cdot\frac{b}{\sin\vartheta}\cdot\left|\frac{db}{d\vartheta}\right|$$

Die Grösse $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist der differentielle Wirkungsquerschnitt und spielt eine zentrale Rolle bei der Beschreibung von Streuprozessen.

Winkelverteilung



Einsetzen des Streuparamters b und dessen Ableitung $\frac{db}{d\vartheta}$ ergibt schliesslich die Rutherford´sche Streuformel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, der angibt, wie viele Teilchen unter einem Winkel ϑ in das Raumwinkelelement dΩ fliegen.

Berücksichtigt man, dass $\sin\vartheta=2\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$,

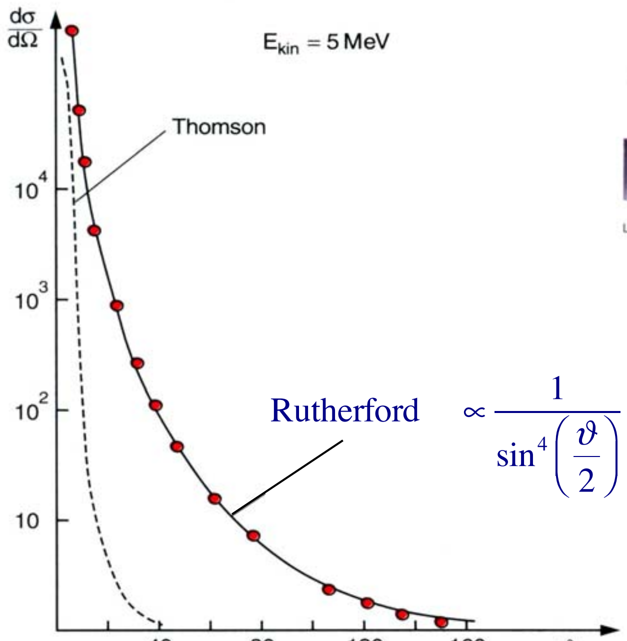
lässt sich $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ relativ einfach schreiben:

Die Anzahl Teilchen die mit dem Winkel ϑ pro Sekunde in das Raumwinkelelement dΩ fliegen:

$$\frac{dN}{d\Omega}\propto\underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega}}_{\text{Differentieller Wirkungs-querschnitt}}=\frac{b}{\sin\vartheta}\cdot\left|\frac{db}{d\vartheta}\right|=\left(\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{zZe^2}{mv^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

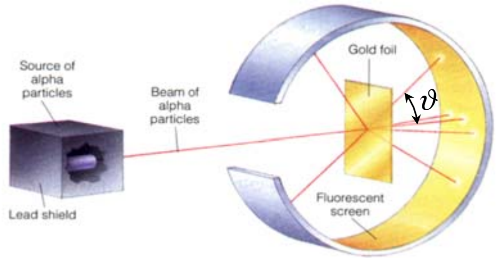
Rutherford´sche Streuformel

1906 – 1911 Rutherford´s Streuexperiment



$$\propto \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Abb. 2.88. Vergleich zwischen den experimentellen Ergebnissen Rutherfords (Kreise), dem W.Q. für Coulombstreuung und dem Streuquerschnitt des Thomson-Modells

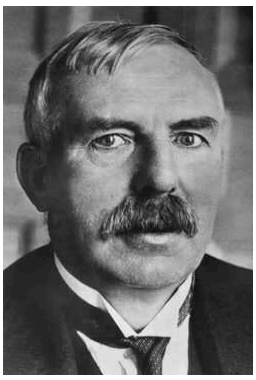


Die **Messdaten** stimmen **exakt** mit der **Rutherford´schen Streuformel** überein.

Thomson´s plumpudding Modell kann die **Winkelabhängigkeit** der gestreuten α-Teilchen **nicht erklären.**

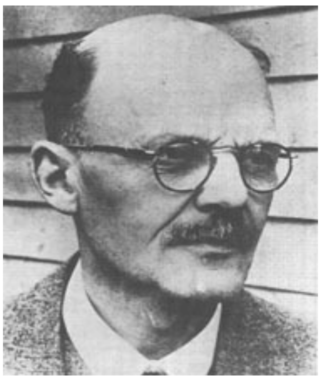
Rutherford, Geiger, Marsden

Damals wie Heute ist Teamarbeit wichtig. Rutherford war ein hervorragender Physiker, Hans Geiger sein Assistent, der die Ingenieuraufgaben bewältigte, und Ernest Marsden ein 20-Jähriger Doktorand, der die gestreuten α-Teilchen tatsächlich einzeln im Labor gezählt hatte. (Nur gerade 1 α-Teilchen pro 8000 wird unter einem grossen Winkel $\vartheta > 90°$ gestreut!)



Sir Ernest Rutherford
* 30. August 1871 in Nelson/Neuseeland
† 19. Oktober 1937 in Cambridge

Nobelpreis 1908
"für seine Untersuchungen über den Zerfall der Elemente und die Chemie der radioaktiven Stoffe"



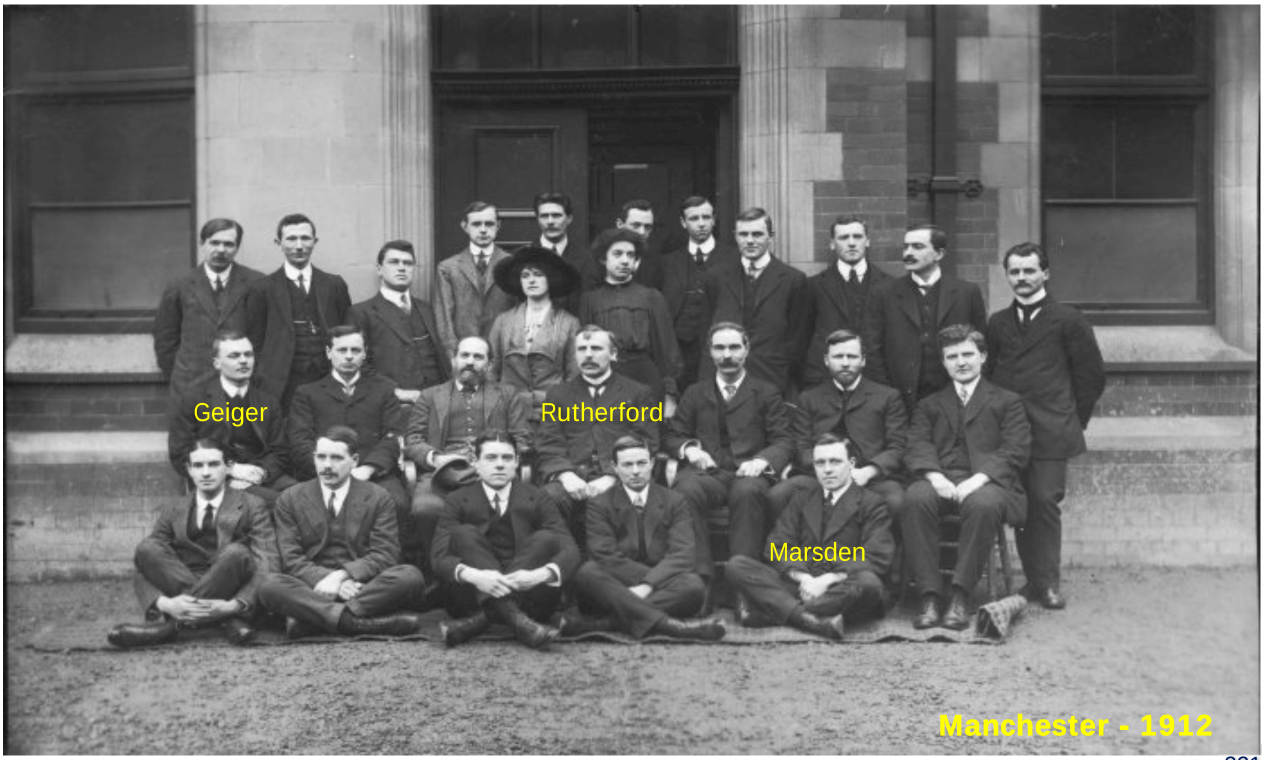
Hans Geiger
* 30. September 1882 in Neustadt
† 24. September 1945 in Potsdam

1928 Geiger-Müller Zählrohr
1925 Professor in Kiel
1929 Professor in Tübingen
1936 Professor in Berlin

Sir Ernest Marsden
* 19. Februar 1889 in Manchester
† 15. Dezember 1970 in Wellington/NZ

1915 Professor in Wellington, Neuseeland

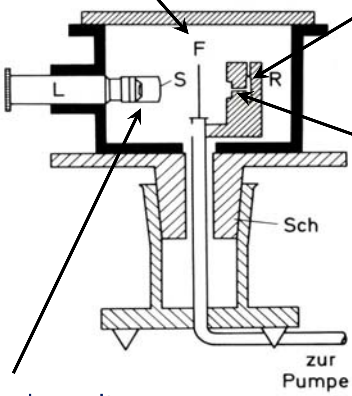
Rutherford´s Team in Manchester um 1912



Rutherford´s Streuexperiment

Dünne Folie
(Gold, Silber, Kupfer,
Aluminium,...)

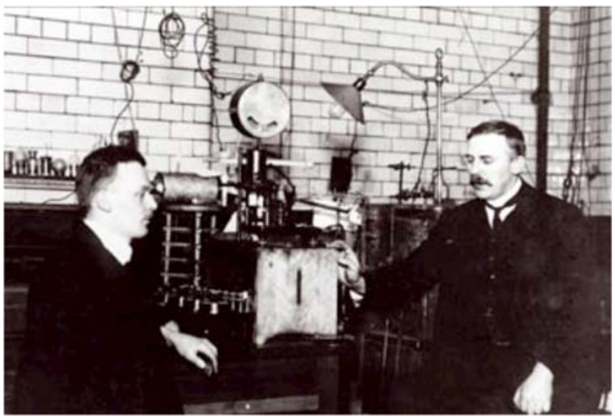
Radon Gas
emittiert α Teilchen



Blendenkanal für
gerichteten Strahl

Mikroskop mit
Szintillationsschirm
(drehbar)

Pumpe damit an Gold
und nicht an Luft gestreut wird



Geiger und Rutherford um 1912

Lord Rutherford schrieb später:

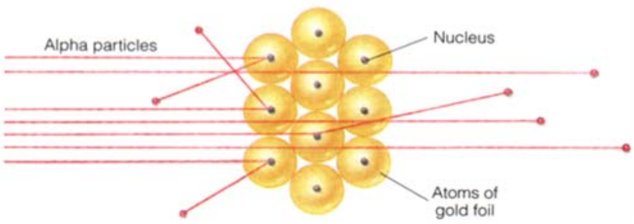
"In den ersten Tagen hatte ich die **Streuung von Alpha-Teilchen** beobachtet und **Dr. Geiger** hatte sie in meinem Labor in allen Einzelheiten untersucht. Er fand, daß die Streuung bei dünnen Schichten von Schwermetall gewöhnlich klein war, von der Größenordnung eines Grades.

Eines Tages kam Geiger zu mir und sagte: *"Meinen Sie nicht auch, daß der junge **Marsden**, den ich in radioaktiven Methoden unterrichte, eine kleine Forschungsaufgabe beginnen müßte?"*
Ich hatte ebenfalls daran gedacht und so sagte ich: *"Warum lassen wir Ihn nicht nachsehen, ob irgendwelche Alpha-Teilchen in große Winkel gestreut werden können?"*
Ich kann Ihnen im Vertrauen sagen, daß ich nicht mehr daran glaubte, daß dies geschehen würde, da wir ja wussten, daß das Alpha-Teilchen ein sehr schnelles und massives Teilchen war mit einer großen Energie, und sie konnten zeigen, daß die Chance für die Rückstreuung eines Alpha-Teilchens sehr gering war, wenn die Streuung auf der akkumulierten Wirkung einer Anzahl von Kleinwinkel-Streuungen beruhte.

Dann erinnere ich mich, wie **Geiger zwei oder drei Tage später in großer Aufregung** zu mir kam und sagte: ***"Es ist uns gelungen, einige Alpha-Teilchen zu bekommen, die zurückkamen."***

... **Es ist so ziemlich das unglaubwürdigste Ereignis, das mir je in meinem Leben passierte.** Es war fast genauso unglaublich, ***als ob Sie eine 38 cm Granate gegen ein Stück Seidenpapier abfeuern, und sie kommt zurück und trifft Sie***."

Auflösungsvermögen des Rutherford Experiments



Durchmesser eines Goldatomkerns: 1.5×10^{-14} m

Damit die **α-Teilchen** den Atomkern auflösen können, müssen deren **de Broglie Wellenlängen** kleiner sein als der **Durchmesser des Atomkerns** selbst.

Rutherford konnte dies um 1906 noch nicht wissen. Tatsächlich hat er **Glück gehabt** und konnte mit seinen α-Teilchen den Atomkern gerade noch erkennen.

Er konnte seine Grösse jedoch nicht bestimmen und nur eine **obere Grenze von 2.7×10^{-14} m** angeben.

Für die de Broglie Wellenlänge eines α-Teilchens gilt:

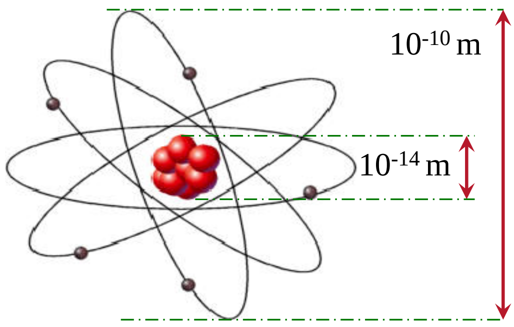
$$\lambda = \frac{h}{m_\alpha v} \approx \frac{6.626\times10^{-34}\ J\ s}{(6.6\times10^{-27}\,kg)\times(1.5\times10^{7}\,m\ s^{-1})} \approx 0.7\times10^{-14}\ m$$

Masse des α-Teilchens

Geschwindigkeit des α-Teilchens 0.05c

Auflösungsvermögen des Rutherford Experiments

Die Struktur der Atome



Atome haben einen **Durchmesser** von ca. **0.1 nm.** Sie bestehen aus einem **massiven, positiv geladenen Kern** und einer **Elektronenhülle.**

Der **Atomkern** macht mit **99.95%** fast die gesamte **Masse** des Atoms aus und hat einen **Durchmesser** von ca. **10 fm**; er ist damit ca. **10´000 mal kleiner als das Atom** selbst.

Die restliche **Masse 0.05%** tragen die viel leichteren **negativ geladenen Elektronen** bei.

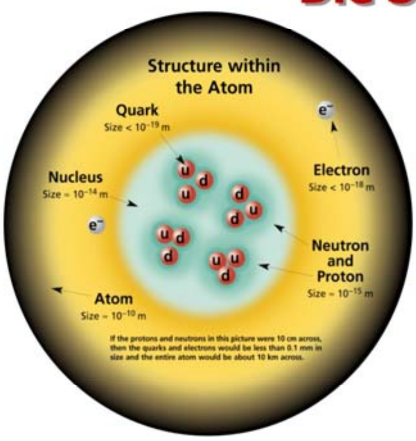
Gebräuchliche Einheiten in der Atom- und Kernphysik sind

Nanometer	1 nm = 10^{-9} m
Pikometer	1 pm = 10^{-12} m
Femtometer	1 fm = 10^{-15} m; dies wird häufig auch als 1 Fermi bezeichnet.

Atome sind nicht unteilbar, sie haben eine **innere Struktur** und sind **im wesentlichen leer**.

Zum Vergleich:
Wäre der **Atomkern** so gross wie eine **Erbse ∅ = 6 mm**, dann wäre das **Atom ∅ = 60 m,** was der **Höhe des Bundeshaus** entspricht!

Die Struktur des Atomkerns



Heliumatom ^{4}He mit zwei Elektronen, zwei Protonen und zwei Neutronen

Das **Rutherford´sche Streuexperiment** wurde verfeinert, wobei nicht nur α-Teilchen, sondern **alle zur Verfügung stehenden Teilchen** in **Streuexperimenten** verwendet wurde und wird.

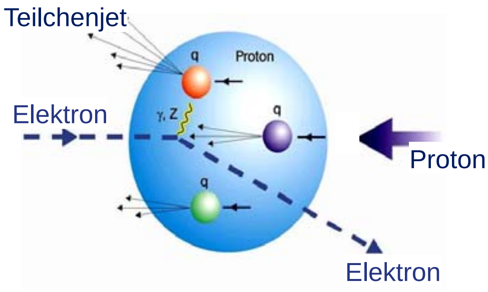
Geladene Teilchen, Elektronen, Kerne, Protonen, Myonen, Pionen, können in **Teilchenbeschleunigern** auf hohe Energien gebracht werden. Entsprechend $\lambda = h/p$ können so **äusserst kleine de Broglie Wellenlängen** erreicht werden, die es erlaubt die **Struktur der Materie zu messen**.

Der **Atomkern** besteht aus **positiv geladenen Protonen** und **neutralen Neutronen**. Protonen und Neutronen haben einen **Radius von ca. 1 fm** und haben wiederum eine innere Struktur; sie bestehen aus **Quarks**.

Ein **Proton** besteht aus **zwei Up-Quarks** und **einem Down-Quark**

Ein **Neutron** besteht aus **einem Up-Quark** und **zwei Down-Quarks**

Die Struktur der Materie



Elektron-Proton Streuung

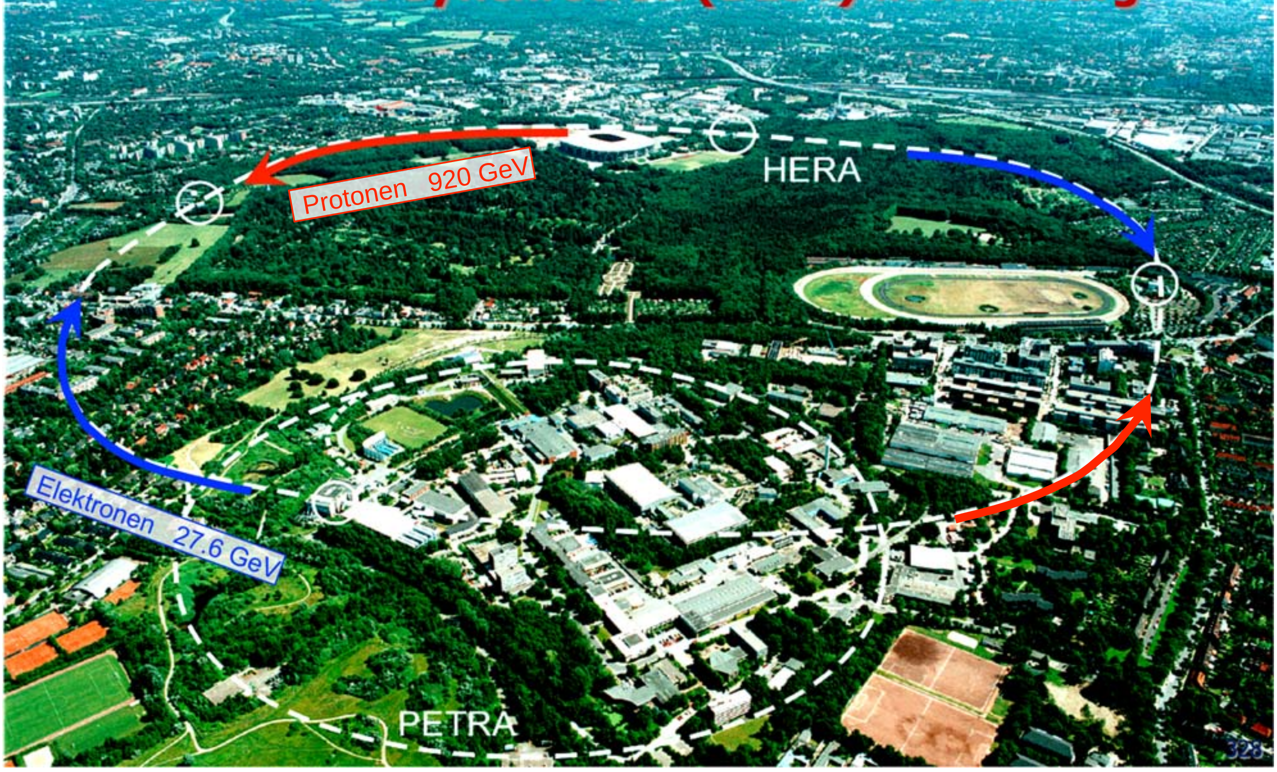
Am **HERA Beschleuniger** am Deutschen Elektronen Synchrotron, DESY, in Hamburg, wurden von 1992-2007 **Elektronen und Protonen** auf hohe Energien beschleunigt und **frontal zur Kollision gebracht**.

Die **de Broglie Wellenlänge des Elektrons**, die im Ruhesystem des Protons betrachtet werden muss, beträgt $\lambda=10^{-18}$ m, sie ist also 1000 mal kleiner als der Protonradius.

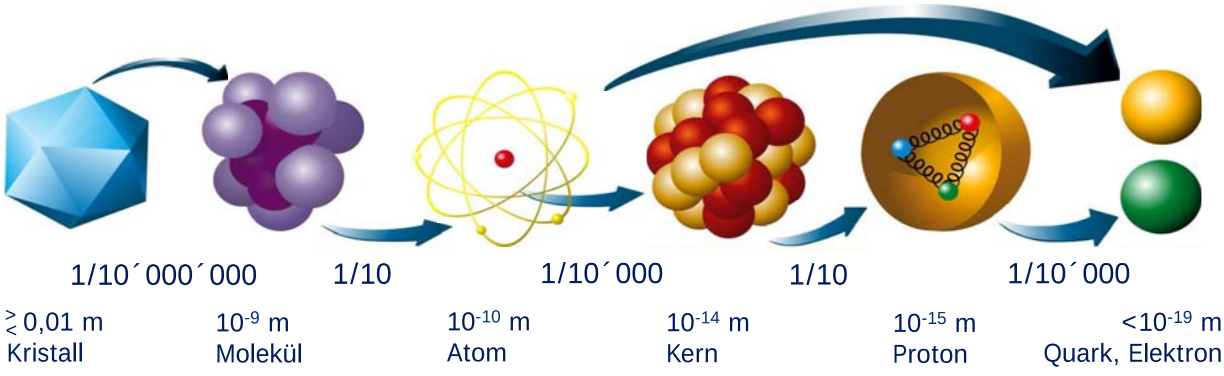
Bei genügend hohen Energien wird die **de Broglie Wellenlänge des Elektrons** so klein, dass das Elektron mühelos **in das Proton eindringen** kann, und im Innern **an einem Quark streut**.

Durch messen der **Winkelverteilung** der gestreuten Elektronen, sowie des **Rückstoss**, den das **Quark** erfährt, und der sich in Form eines **Jet von neuen Teilchen** manifestiert, lässt sich so die **Struktur des Protons ergründen** und die **Eigenschaften der Quarks** ermitteln.

HERA – der Elektron-Proton Collider am Deutschen Elektronen Synchrotron (DESY) in Hamburg



Die Struktur der Materie

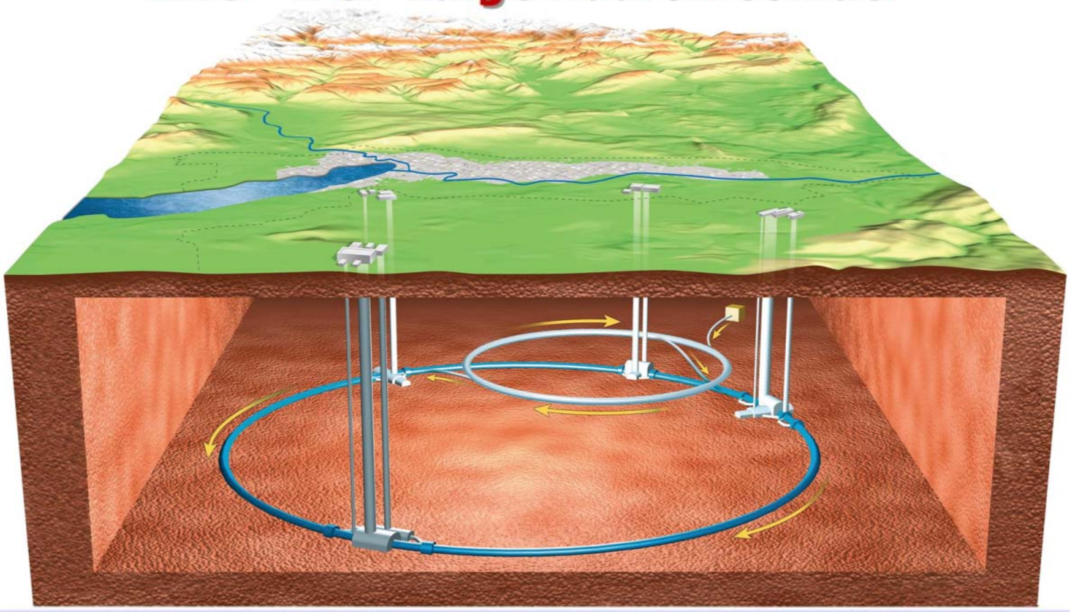


Stecknadelkopf:
10^{-3}m = 0,001 m

Elektron, Quark:
$<10^{-19}$m = 0,000´000´000´000´000´000´1 m

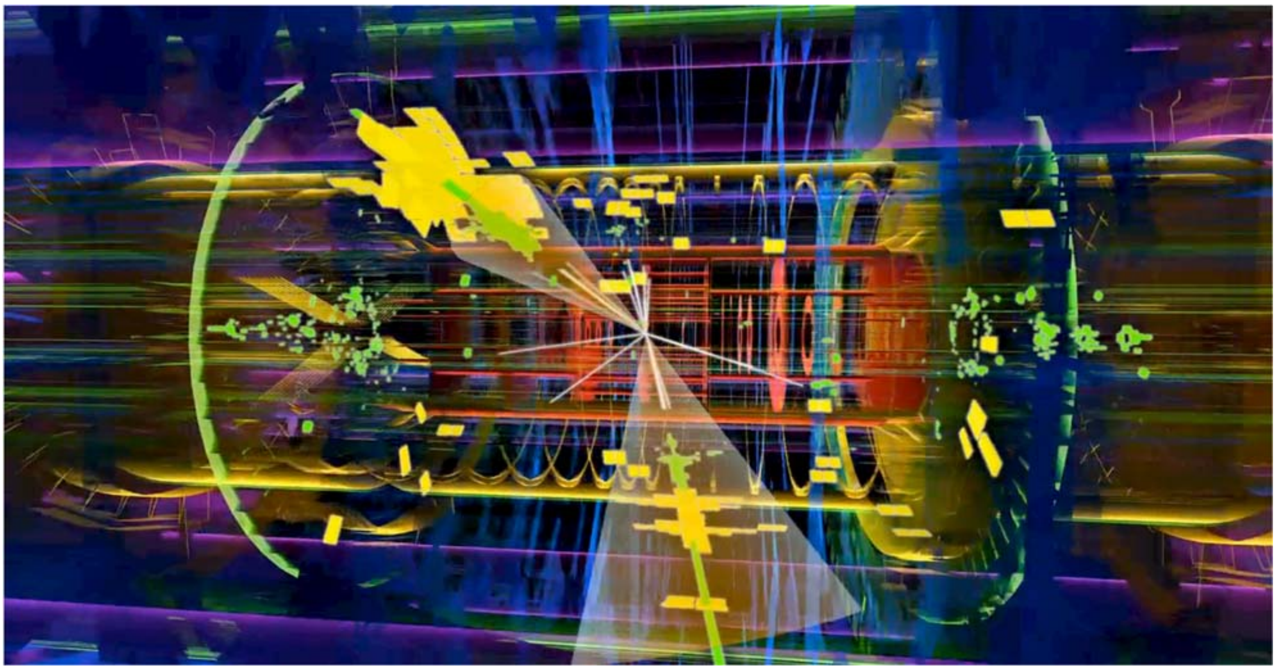
So weit wir wissen, haben Elektronen und Quarks keine innere Struktur.
Die experimentell zugängliche Grenze liegt neu bei 10^{-19} m. (Large Hadron Collider am CERN)

LHC – Der Large Hadron Collider



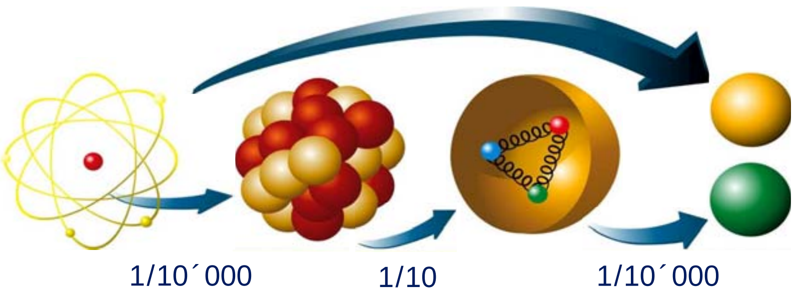
Der **LHC**, am **CERN** bei Genf ist mit seinen **27 km Umfang** der aktuell grösste Teilchenbeschleuniger weltweit. **Protonen** werden auf eine Energie von **4 TeV** beschleunigt und frontal zur Kollision gebracht. Die bei jeder Kollisionen entstehenden Teilchen werden in Teilchendetektoren gemessen. Dabei können die fundamentalen Teilchen, aus denen die Welt und das Universum besteht, samt ihren Wechselwirkungen studiert werden, was zu einem tiefen Verständnis der Vorgänge im gesamten Universum führt.

Proton-Proton Kollision im ATLAS Detektor am LHC



Bei jeder Kollision entstehen **50 oder mehr neue Teilchen**. Von diesen müssen **Streuwinkel**, **Energie**, **Ladung**, sowie die **Teilchensorte** ($e^{\pm}$, $\mu^{\pm}$, γ, oder Hadron ($p^{\pm}$, n, $\pi^{\pm}$, ...)) bestimmt werden.

Auflösungsvermögen des Large Hadron Colliders



Das **Auflösungsvermögen** des **LHC**´s von **10^{-19} m** lässt sich am Besten in einem **Vergleich** zeigen:

Sei ein **Atomradius 1000 km** ≈Distanz von Bern nach Kopenhagen, oder 3× zur ISS in 350 km Höhe

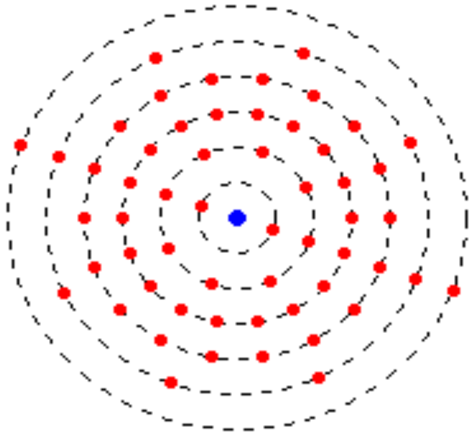
Kernradius: 10^6 m ÷ 10^4= **10^2 m** ← ca. doppelt so hoch wie das Bundeshaus (60m Kuppelhöhe)

Protonradius: 10^2 m ÷ 10 = **10 m** ← höchste Plattform beim (olympischen) Turmspringen

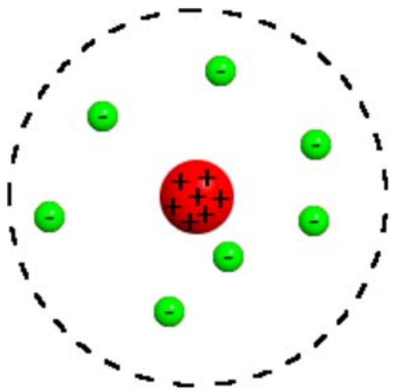
Quarks und Elektronen sind kleiner als: 10 m ÷ 10^4 = **1 mm** ← so gross wie ein Stecknadelkopf

Atomphysik

Das Bohr´sche Atommodell



Das Rutherford´sche Atommodell



Rutherford´sches Atommodell

Ein Atom besteht aus **einer Hülle** und **einem kleinen** (idealisiert punktförmigen) **massiven Kern**, der fast die ganze Masse des Atoms beinhaltet.

Um den **positiv geladenen Kern** gibt es ein **Coulomb-Potential** in welchem sich die negativ geladenen Elektronen auf Umlaufbahnen um den Kern befinden.

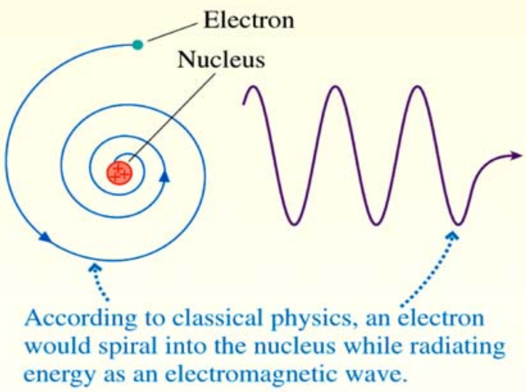
Die **Anzahl positiver Elementarladungen im Kern, die Kernladungszahl**, ist **ebenso groß wie die Zahl der Elektronen** des ganzen Atoms, so dass es **nach aussen hin neutral erscheint**.

Die **Coulomb-Kraft**, die zwischen dem Kern und einem Elektron wirkt, ist **formal identisch** mit der **Gravitationskraft** zweier massiver Körper.

Man muss daher davon ausgehen, dass sich **Elektronen auf Planetenbahnen (Ellipsen) um den Kern bewegen** und entsprechend **beschleunigt** sind.

Energieverlust durch Strahlung

Als **beschleunigte Ladungen** müssten die Elektronen somit **ständig Strahlung aussenden** und wegen dieses **Energieverlustes** innerhalb von weniger als **1 μs in den Kern stürzen**.



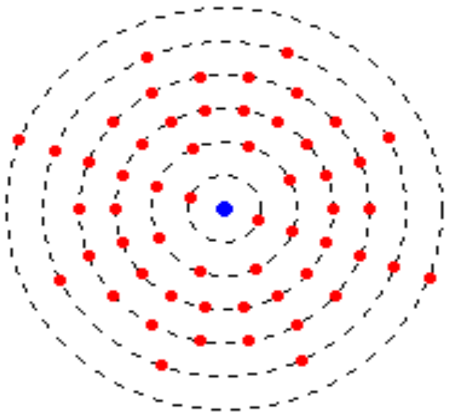
$$\tau_{Elektron \searrow Kern} \lesssim 1\ \mu s$$

Rutherford war das Problem der "Instabilität" seines Atommodells sehr wohl bewusst.

Eine Erklärung dafür, warum die Gesetze der **klassischen Elektrodynamik** für ein Elektron im Atom nicht gelten sollten, **konnte er jedoch nicht geben**.

Niels Bohr, der Assistent bei Rutherford war, schlug 1913 sein Atommodel vor.

Bohr´sches Atommodell



Niels Bohr
* 7. Oktober 1885 in Kopenhagen
† 18. November 1962 in Kopenhagen

Nobelpreis 1922
„für seine Arbeit über die Struktur der Atome und der von ihnen ausgehenden Strahlung"

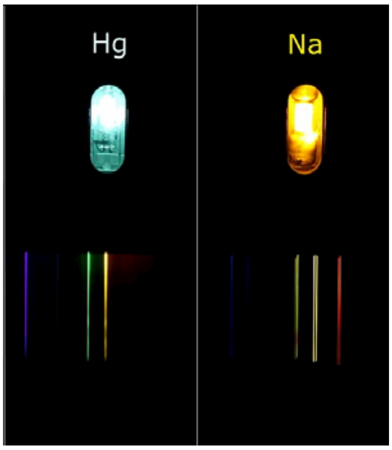
Niels Bohr arbeitete im Frühling 1912 in Rutherford´s Laboratorium in Manchester. Dort bezog er die experimentellen Befunde **Rutherford**´s, sowie **Planck´s Energiequanten** und **Einstein´s Lichtquanten** in seine **theoretischen Arbeiten** zur **Atomstruktur** mit ein und schlug schliesslich im April 1913 sein Atommodell vor, das **stabile Kreisbahnen** der Elektronen um einen positiv geladenen Kern enthielt.

Damit konnten zum ersten Mal die **Spektrallinien**, die Atome aussenden, erklärt werden.

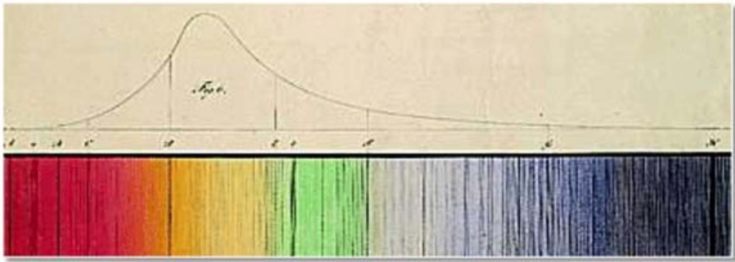
Das Bohr´sche Atommodel erklärt Spektrallinien

Spektrallinien sind voneinander **scharf getrennte Linien**, d.h. Frequenzen, **elektromagnetischer Wellen**, die **von einem heissen Körper ausgesandt** werden (**Emissionslinien**), oder die in einem **kalten Gas absorbiert** werden (**Absorptionslinien**).

Diese Linien sind **charakteristische Fingerabdrücke der Elemente**, die in dem strahlenden Körper, oder im absorbierenden Gas, enthalten sind.



Spektrallinien einer heissen Quecksilber und Natrium Lampe (Emissionslinien).

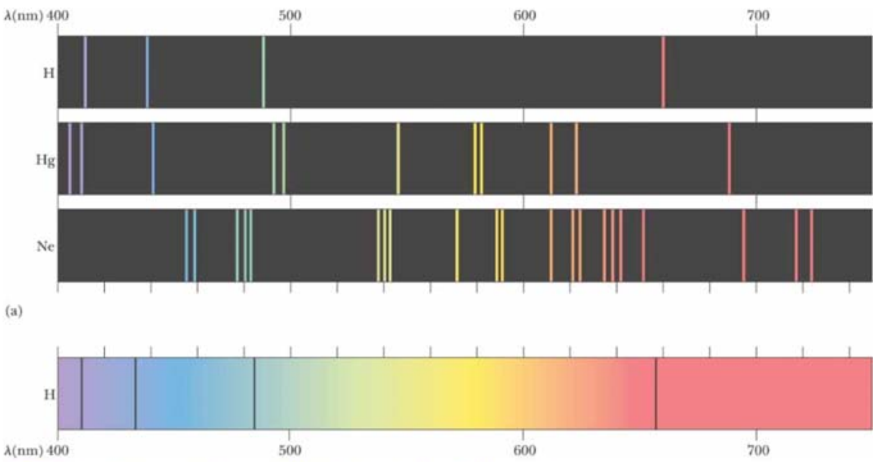


Absorptionslinien des Sonnenlichts in der Photosphäre der Sonne. Joseph Fraunhofer beschrieb um 1814 über 570 Linien im Spektrum der Sonne.
1868 wurde das damals auf der Erde noch unbekannte Element Helium im Sonnenspektrum identifiziert (helios → Sonne).

Spektrallinien einiger Elemente

Spektrallinien sind charakteristische Fingerabdrücke ihrer Elemente

Kontinuierliches Spektrum
eines **schwarzen Körpers**
Planck´sche Strahlung



Wasserstoff
Emissionsspektrum

Quecksilber
Emissionsspektrum

Neon
Emissionsspektrum

Wasserstoff
Absorptionsspektrum

Spektrallinien sind spezifisch für jedes Element.
Es ist naheliegend, dass die Erklärung und eine quantitative Berechnung von Spektrallinien nur im Rahmen eines Atommodells möglich ist. **Das Bohr´sche Atommodell hat hier einen entscheidenden Durchbruch ermöglicht.**

Charakteristiken des Bohr´schen Atommodells

Bohr übernahm die Idee von Max Plack, nach der Energie nur in **Quanten $h\nu$** abgestrahlt werden kann. **Eine kontinuierliche Strahlung eines Elektrons ist demnach nicht möglich**, somit gibt es auch stabile Elektronenbahnen. Des weiteren postulierte Bohr folgende Modellannahmen:

1. **Elektronen bewegen sich auf stabilen Kreisbahnen um den Atomkern.**
2. **Nur bestimmte Kreisbahnen sind stabil, welche mittels Quantenzahlen $n=1,2,3,\ldots$ charakterisiert werden.**
3. **Elektronenbahnen sind stabil, wenn der Bahndrehimpuls L des Elektrons ein ganzzahliges Vielfaches des reduzierten Planck´schen Wirkungsquantums $\hbar$ ist. $\Rightarrow L = n\hbar$.**
4. **Zu jeder Elektronenbahn gibt es eine charakteristische Energie $E_1<E_2<E_3<\ldots$**
5. **Der energetisch tiefste Zustand heisst Grundzustand, alle anderen Zustände heissen angeregt.**
6. **Ein Atom kann von einem höheren Zustand zu einem tieferen springen, wenn es ein Photon der Frequenz $\nu=(E_{n1}- E_{n2})/h$ emittiert.**
7. **Ein Atom kann von einem tieferen Zustand zu einem höheren angeregt werden, wenn es ein Photon der Frequenz $\nu=(E_{n1}-E_{n2})/h$ absorbiert, oder bei einer Kollision mit einem anderen Teilchen geeigneter Energie.**
8. **Angeregte Atome fallen rasch in ihren Grundzustand. Dabei werden ein oder mehrere Photonen emittiert.**

339

Quantisierung des Bahndrehimpulses

Bohr´s 3. Postulat besagt, dass Elektronenbahnen stabil sind, wenn der **Bahndrehimpuls L** des Elektrons ein ganzzahliges Vielfaches des reduzierten Planck´schen Wirkungsquantums $\hbar$ ist.

$$\left|\vec{L}_n\right| = \left|\vec{r}_n \times \vec{p}_n\right| = r_n \cdot m_e \upsilon_n = n\hbar$$

n	Hauptquantenzahl (Bahnindex), n=1,2,3....
$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$	reduzierte Planck'sche Konstante
$\vec{L}_n$	Bahndrehimpuls eines Elektrons auf seiner n-ten Bahn
$\vec{r}_n$	Ortsvektor dieses Elektrons, wobei der Kern im Ursprung definiert ist.
$r_n = \left\|\vec{r}_n\right\|$	Radius der n-ten Bahn
$\vec{p}_n$	Drehimpuls dieses Elektrons
m_e	Elektronmasse
υ_n	Geschwindigkeit dieses Elektrons

de Broglie Wellenlänge von Bahnelektronen

Was Bohr 1913 nicht wissen konnte, war wieso der Bahndrehimpuls $L_n = r_n \times p_n = n\hbar$ quantisiert ist.
Bohr hatte dies einfach so postuliert. Erst de Broglie lieferte 1926 dafür eine Begründung.

Da jedes **Teilchen** auch eine **Welle** ist, muss dies auch für Elektronen gelten welche sich auf Bohr´schen Bahnen bewegen. Man erhält so eine **intuitive Interpretation** zur Quantisierung des Bahndrehimpulses:

Aus $L_n = r_n \cdot p_n = n \cdot \hbar = n \cdot \frac{h}{2\pi}$ folgt für den Umfang $U_n = 2\pi r_n$ der n-ten Kreisbahn:

$$2\pi r_n \cdot p_n = n \cdot h$$

$$U_n = 2\pi r_n = n \cdot \underbrace{\frac{h}{p_n}}_{\lambda_n} = n \cdot \lambda_n,$$ mit λ_n der de Broglie Wellenlänge.

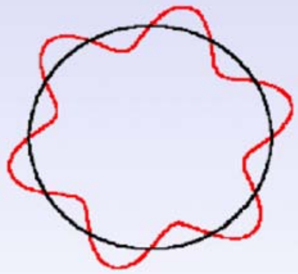
Der **Umfang der n-ten Bahn** ist ein **ganzzahliges Vielfaches der de Broglie Wellenlänge** der sich in der n-ten Bahn befindenden Elektronen.
Diese erfüllen so gerade die Bedingung von **stehenden Wellen**.

Eine **Elektronenbahn ist stabil**, wenn der **Bahnumfang** gerade ein **ganzzahliges Vielfaches der de Broglie Wellenlänge** des Elektrons ist, d.h. wenn sich das Elektron als stehende Welle um den Kern manifestiert.

Elektronenbahnen als stehende Wellen

Die **Stabilität** von **Elektronenbahnen**, bei denen der **Umfang** gerade **ein ganzzahliges Vielfaches** der **de Broglie Wellenlänge** ist, ist gleichbedeutend mit einer **stehenden Welle** entlang der **Kreisbahn.**

Ganzzahliges Vielfaches n=6



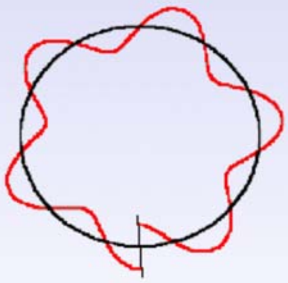
$2\pi r_n = 6 \cdot \lambda_n$

stehende Elektronen Welle

mit n=6

$\Rightarrow$ stabile Elektronenbahn

Kein ganzzahliges Vielfaches n=5.5



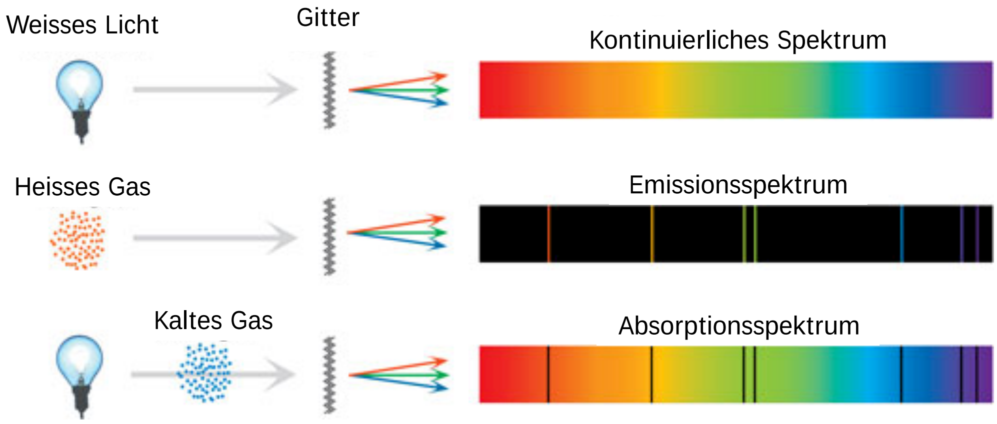
$2\pi r_n = 5.5 \cdot \lambda_n$

keine stehende Elektronen Welle

n=5.5 keine ganze Zahl

$\Rightarrow$ keine stabile Elektronenbahn

Emissions- und Absorptionsspektrum



Licht wird mit einem Gitter in sein Spektrum aufgespalten.

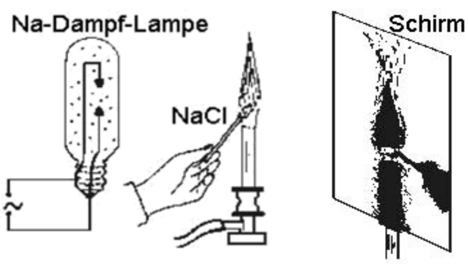
✧ Bei **weissem Licht** wird so ein **kontinuierliches Spektrum** sichtbar (Regenbogenfarben).

✧ Licht, das von einem **heissen Gas** ausgesandt wird, zeigt nur **einzelne Linien** (Farben).

✧ Bei **weissem Licht**, welches nun das selbe **kalte Gas durchleuchtet**, werden **einzelne Farben** im Gas **absorbiert**. Es entstehen **schwarze Linien**, quasi als Negativbild des Emissionsspektrums.

Experiment: Natrium-Dampf-Lampe

Eine Natrium-Dampf-Lampe leuchtet grell Orange. Diese Farbe ist durch die **Natrium Emissionslinien** definiert, welche in ihrem Spektrum eine Doppel-Linie mit grosser Intensität im Orangen Bereich enthält.



Mit dem Licht einer **Na-Dampf-Lampe** wird die Flamme eines Bunsenbrenners auf einen Schirm projiziert. Das Licht der Lampe scheint durch die Flamme hindurch.

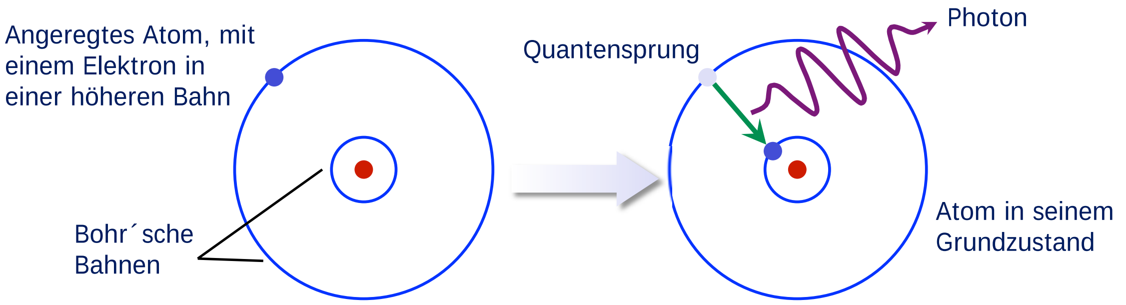
⇒ Die Flamme erscheint **sehr hell** auf dem Schirm, und ist fast nicht erkennbar.

Es wird nun **Kochsalz** (**NaCl**) in der Flamme des Bunsenbrenners verdampft. Dabei entsteht ein Natrium Dampf, wobei die meisten Natrium-Atome im Grund-zustand sind. Das Licht der Natrium-Dampf-Lampe wird nun von den Atomen des Natrium Dampfs absorbiert.

⇒ Die Flamme wird so undurchsichtig für das Licht der Natrium-Dampf-Lampe und erscheint nun als **schwarzer Schatten** auf dem Schirm

Quantensprünge und Spektrallinien

Emissionsspektrum

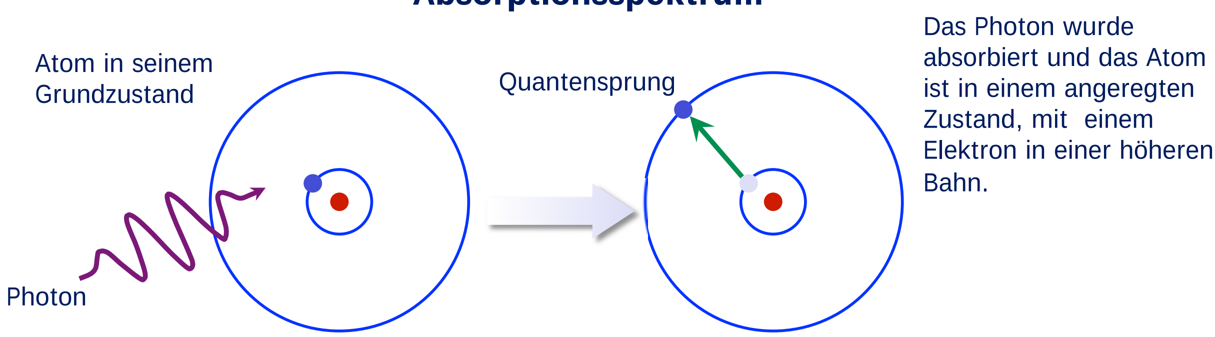


In **heissen Körpern** sind viele **Atome** in einem **angeregten Zustand**. D.h. einige der Elektronen sind in höheren Bohr´schen Bahnen. Diese fallen rasch in den Grundzustand zurück, und senden dabei ein **Photon** mit einer **Frequenz** $\nu=(E_{n1}-E_{n2})/h$ aus. Diese **Photonen** ergeben gerade das **Emissionsspektrum**.

Das **Springen von Elektronen von einer Bahn in eine andere Bahn** wird auch **Quantensprung** genannt.

Quantensprünge und Spektrallinien

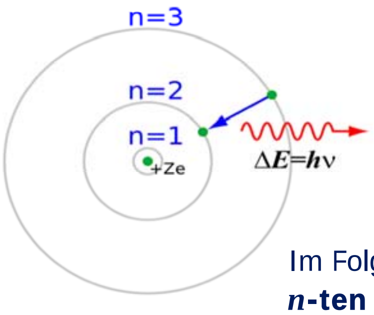
Absorptionsspektrum



In **kalten Gasen** sind die meisten **Atome** im **Grundzustand**. Trifft ein Photon mit einer **geeigneten Frequenz** $\nu=(E_{n1}-E_{n2})/h$ auf ein Atom, wird dieses **absorbiert** und ein Elektron in eine höhere Bahn gehoben. Diese **Photonen** fehlen im allgemeinen Spektrum, und sind so als **Absorptionslinien** erkennbar.

Auch hier handelt es sich um einen **Quantensprung**.

Berechnung von Spektrallinien im Bohr´schen Atommodell



Springt ein Elektron einer höheren Bahn n_1 in eine tiefere n_2, wird ein Photon der Frequenz $\nu=(E_{n1}-E_{n2})/h$ emittiert.

Im Folgendem geht darum die **Energie E_n** eines Elektrons in seiner **n-ten Bohr´schen Bahn** zu berechnen.

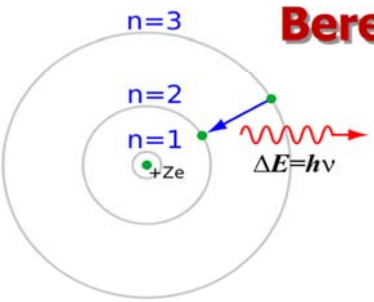
Dazu benötigen wir:

- die **Coulomb-Kraft** zwischen dem positiv geladenen Kern und dem negativ geladenen Elektron,
- den **Radius r_n** der n-ten Bahn,
- sowie die **Geschwindigkeit υ_n** und **Impuls $p_n=m_e\upsilon_n$** des Elektrons.

Wir verwenden, dass das Elektron durch die Coulomb Wechselwirkung an den Kern gebunden ist, und, dass der **Drehimpuls $L_n = n\hbar$** quantisiert ist.

Glücklicherweise ist die **Geschwindigkeit υ_n** der Bahnelektronen nicht sonderlich hoch, sodass wir klassisch rechnen können.

Berechnung der Bahnradien r_n



Für ein **kreisendes Elektron** mit **Masse m_e** und **Geschwindigkeit υ_n** gilt, dass die **Zentripetalkraft F_Z** gleich der **Coulomb-kraft F_C** ist. Dabei ist die **Ladung des Elektrons e**, und die des **Kerns Ze**, wobei **Z** die **Kernladungszahl** ist.

$$F_Z = F_C$$

$$\frac{m_e\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_n^2}$$

Umformen und mit der Elektronenmasse m_e multiplizeren ergibt: $\rightarrow \quad r_n^2 m_e^2 \upsilon_n^2 = \frac{m_e}{4\pi\varepsilon_0} r_n Ze^2$

Wir verwenden nun, dass der **Bahndrehimpuls L_n** des Elektrons ein ganzzahliges Vielfaches des reduzierten Planck´schen Wirkungsquantums $\hbar$ ist. **$L_n = n\hbar$**. Dies ergibt:

$$\left|\vec{L}_n\right| = \left|\vec{r}_n \times \vec{p}_n\right| = r_n \cdot m_e \upsilon_n = n\hbar$$

$$\rightarrow \quad L_n^2 = n^2\hbar^2 = r_n^2 m_e^2 \upsilon^2 = \frac{m_e}{4\pi\varepsilon_0} r_n Ze^2$$

und schliesslich für den **Radius r_n** der **n**-ten Bahn: $r_n = \frac{n^2}{Z} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e}$

Der Bohr´sche Radius a_0

Der Radius der n-ten Bohr´schen Bahn r_n hängt ausschliesslich von **Naturkonstanten** ε_0, $\hbar$, m_e und e ab, sowie von der **Kernladungszahl** Z und der **Quantenzahl** n.

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e}$$

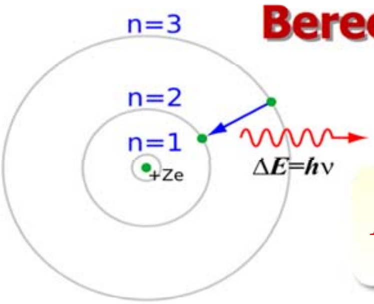
Elektrische Feldkonstante	$\varepsilon_0 = 8.854187817\ldots\times 10^{-12}\ \mathrm{AsV^{-1}m^{-1}}$
Reduzierte Planck´sche Konstante (h quer)	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571726(26)\times 10^{-34}\ \mathrm{Js}$
	$= 6.58211928(15)\times 10^{-16}\ \mathrm{eVs}$
Elektronenmasse	$m_e = 9.109\ 382\ 91(40)\times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
	$= 0,510\ 998\ 928(11)\mathrm{MeV\,c^{-2}}$
Elektronenladung	$e = 1.602\ 176\ 565\times 10^{-19}\ \mathrm{As}$

Die letzten beiden Ziffern in Klammern geben die Genauigkeit an, mit der die jeweilige Konstante bekannt ist. So bedeutet 6.558211928(15) in der herkömmlichen Schreibweise 6.558211928±0.000000015.

Es ist nun möglich den **Radius des Wasserstoffatoms (Z=1)** in **seinem Grundzustand (n=1)** zu bestimmen. Dies definiert gerade den **Bohr´schen Radius** a_0, der **Radius eines H-Atoms**!

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e^2} \qquad a_0 = 5.2918\times 10^{-11}\mathrm{m} \quad \text{Bohr´scher Radius}$$

Berechnung von Energieniveaus



Die **Energie eines Elektrons** auf seiner Bohr´schen Bahn ist die Summe aus seiner **kinetischer** und seiner **potentiellen** Energie:

$$E_n = E_n^{kin} + E_n^{pot} = \frac{1}{2} m_e \upsilon_n^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r_n}$$

Die Geschwindigkeit υ_n und der Bahnradius r_n können nun eingesetzt werden:

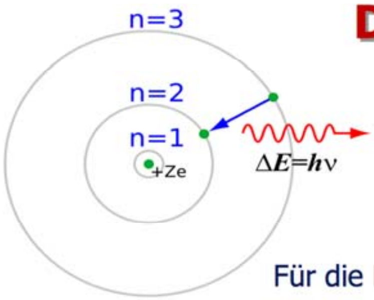
$$L_n = r_n m_e \upsilon_n = n\hbar \Rightarrow \quad \upsilon_n = \frac{n\hbar}{r_n m_e} \qquad r_n = \frac{n^2}{Z} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e}$$

$$E_n = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{n\hbar}{m_e r_n} \right)^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{Ze^2 m_e}{n^2 4\pi\varepsilon_0 \hbar^2} \right)$$

nochmaliges Einsetzen des Bahnradius r_n liefert schliesslich:

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \cdot \frac{e^4 m_e}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2}$$

Energie eines Elektrons auf seiner n-ten Bohr´schen Bahn.



Die Rydberg Energie Ry

Die **Rydberg-Energie Ry** ist die **Bindungsenergie** des Elektrons im **Wasserstoffatom (Z=1)** in seinem **Grundzustand (n=1).**

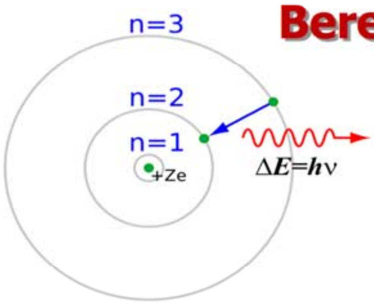
Für die Energie eines Elektrons auf seiner n-ten Bohr´schen Bahn gilt:

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \cdot \frac{e^4 m_e}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2}$$

Einsetzen von Z=1 und n=1 liefert: $$1\,\mathrm{Ry} = \frac{e^4 m_e}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2} = 13.6\,\mathrm{eV}$$

damit lässt sich die Energie eines Elektrons auf seiner n-ten Bahn leicht merken: $$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \cdot 13.6\,\mathrm{eV}$$

Die Energie, die aufgebracht werden muss, um Wasserstoff zu ionisieren ist gerade 13.6 eV.



Berechnung von Spektrallinien

Photonen haben gerade eine Energie $E=h\nu$, die durch **die Differenz der Elektronenenergien** der **höheren Bahn** zur **niedrigeren Bahn** bei einem **Quantensprung** freigesetzt wird.

Wir müssen also **Energiedifferenzen ΔE** berechnen:

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \cdot \frac{e^4 m_e}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2}$$

Die Energiedifferenz vom n_1-ten in den n_2-ten Zustand ist gerade die Energie des emittierten Photons:

$$\Delta E_{n_1,n_2} = E_{n_2} - E_{n_1} = Z^2 \frac{e^4 m_e}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)\hbar^2}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = h\nu$$ **Photonenergie**

Damit kann das Wasserstoffspektrum verstanden werden.
Atome mit mehr als einem Elektron können nicht mit dem Bohr´schen Atommodell beschrieben werden; wir werden darauf noch zurück kommen.

Die Linien im Wasserstoffspektrum

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\cdot 13.6\ \text{eV}$$

$$E_\infty = 0\ \text{eV}$$

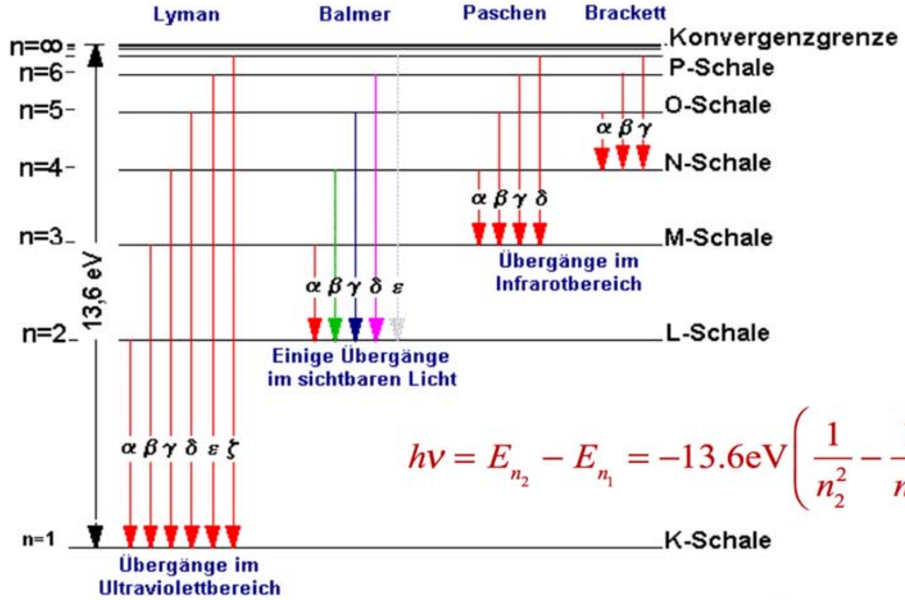
$$E_5 = -0.54\ \text{eV}$$

$$E_4 = -0.85\ \text{eV}$$

$$E_3 = -1.51\ \text{eV}$$

$$E_2 = -3.40\ \text{eV}$$

$$E_1 = -13.61\ \text{eV}$$



$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1} = -13.6\text{eV}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

Übergange von höheren Bahnen in tiefere Bahnen, wobei die tiefere Bahn bei der Lyman Serie n=1 ist, bei der Balmer Serie n=2, bei der Paschen Serie n=3, und bei der Bracket Serie n=4.
In jeder Serie werden die Linien mit Griechischen Buchstaben durchnummeriert. zBsp. Lyman-Alpha L_α, oder Balmer-Gamma B_γ, sind typische spektroskopische Bezeichnungen.

Die Linien im Wasserstoffspektrum

$$E_\infty = 0\ \text{eV}$$

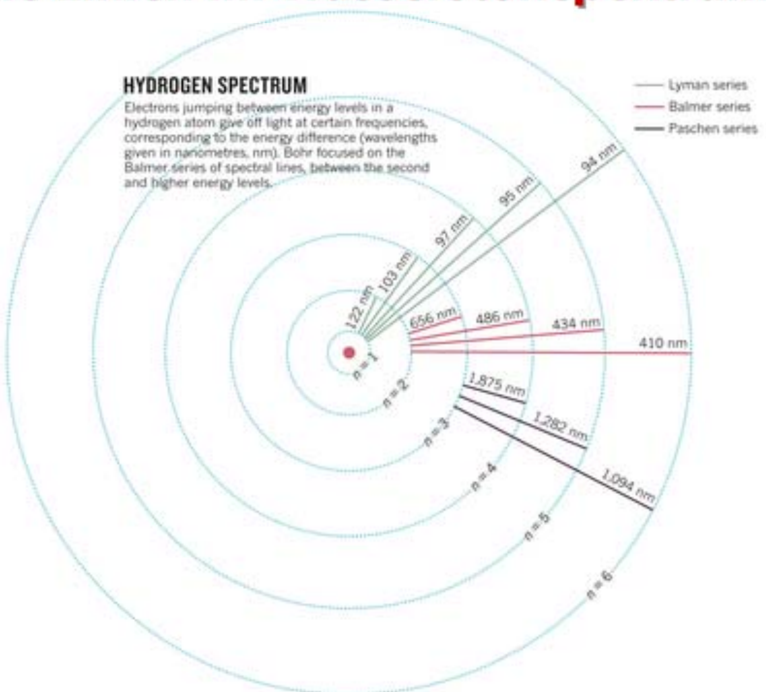
$$E_5 = -0.54\ \text{eV}$$

$$E_4 = -0.85\ \text{eV}$$

$$E_3 = -1.51\ \text{eV}$$

$$E_2 = -3.40\ \text{eV}$$

$$E_1 = -13.61\ \text{eV}$$



$$E_n = -\frac{1}{n^2}\cdot 13.6\ \text{eV}$$

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1} = -13.6\text{eV}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

Erfolge des Bohr´schen Modells

Das Bohr´sche Atommodell ermöglichte einen ersten wichtigen Schritt im Verständnis des Aufbau´s der Materie. Seine wichtigsten Erfolgen liegen aber auch ein paar gewichtige Probleme gegenüber:

Erfolge

- ✓Interpretation des Wasserstoffspektrums
- ✓Interpretation von Atomspektren, bei welchen gerade **1 Elektron** um einen geladenen Kern „kreisen“
  - ✓Wasserstoff
  - ✓Einfach ionisiertes Helium
  - ✓Doppelt ionisiertes Lithium
  - ✓etc
- ✓Berechnung der Bahnradien des Wasserstoffs
  - ✓Bohr´scher Radius
- ✓Berechnung der Energiezustände des Wasserstoffs
- ✓Quantitative Interpretation des Periodensystems der Elemente

... und Probleme des Bohr´schen Models

Das Atommodell von Bohr steht in vielen Punkten im Widerspruch zu der durch Messung zugänglichen Realität. Einige dieser Widersprüche waren bereits zur Zeit der Erstellung des Modells bekannt. Andere wurden später mit verbesserten Experimenten und weiter ausgearbeiteter Theorie der Quantenmechanik offensichtlich:

Probleme

- ❖ Die Postulate werden durch kein grundlegendes Prinzip, sondern allein durch ihren Erfolg gerechtfertigt. Sie widersprechen der klassischen Elektrodynamik.
- ❖ Chemische Bindungen können mit dem Bohr-Modell nicht verstanden werden.
- ❖ Der Bahn-Drehimpuls des Elektrons im Grundzustand müsste nach dem Bohr-Modell $\hbar$ sein, tatsächlich ist er aber 0.
- ❖ Sobald ein Atom mehr als ein Elektron besitzt, passen die mit dem Bohr-Modell berechneten Linienpositionen nicht zu den gemessenen Spektren.
- ❖ Die Aufspaltung vieler Spektrallinien unter dem Einfluss von Magnetfeldern (Zeeman-Effekt) kann nicht erklärt werden (Feinstruktur).
- ❖ Bestimmte Spektrallinien des Wasserstoffs erweisen sich bei genaueren Messungen als Doppellinien. Diese nach ihrem Entdecker Lamb-Shift genannte Trennung kann das Bohr-Modell nicht erklären.
- ❖ Die in der Radioastronomie wichtige 21cm-Linie des Wasserstoffs kann nicht aus dem Bohr-Modell abgeleitet werden (Hyperfeinstruktur).

Atomphysik

Modernes Atommodell

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(\vec{x},t)}{\partial x^2}+V(\vec{x})\Psi(\vec{x},t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t}$$

Schrödingergleichung

Pauli Prinzip

$\Psi(\vec{x},t) = \text{Wellenfunktion}$

Erwin Schrödinger

An einem **Seminar an der Universität Zürich** erläuterte **Schrödinger** den Zusammenhang zwischen Teilchen und Wellen und de Broglies Interpretation zur Quantisierung des Bahndrehimpulses $2\pi r_n = n \cdot \lambda_n$ (ca. 1925)

Peter Debye (Physik Professor in Zürich und 1936 Nobelpreis für Chemie) bemerkte dazu:

> *"...diese Art der Diskussion sei kindisch. Um Wellen richtig zu beschreiben, braucht es eine **Wellengleichung**..."*

*"Wenn es doch bei dieser **verdammten Quantenspringerei** bleiben soll, so bedaure ich, mich überhaupt jemals mit der **Quantentheorie** abgegeben zu haben."*
– **Erwin Schrödinger** in einer Diskussion mit Niels Bohr

Wellengleichungen beschreiben die Auslenkungen u einer Welle als Funktion von Ort x und Zeit t. Insbesondere ist die 2. Ableitung der Auslenkung nach der Zeit proportional zur 2. Ableitung nach dem Ort:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ 1 dim. Wellengleichung

Erwin Schrödinger
* 12. August 1887 in Wien
† 4. Januar 1961 in Wien

Nobelpreis 1933
„für seine Arbeit über eine neue Form der Atomtheorie"

In der Folge arbeitete Schrödinger an einer neuen Formulierung der Quantenmechanik, die auf Wellengleichungen beruhte.

Schrödingergleichung

Schrödinger hat daraufhin 1926 die nach ihm benannte **Schrödinger-Gleichung** vorgestellt, mit welcher er **korrekt das Wasserstoffatom berechnen** konnte:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(\vec{x},t)}{\partial x^2}+V(\vec{x})\Psi(\vec{x},t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t}$$

Schrödinger-Gleichung

Dabei sind $\boldsymbol{m}$ die Elektronenmasse, und $\boldsymbol{V(x)}$ das Coulombpotential des Kerns, der bei $\boldsymbol{x=0}$ in Ruhe ist. $\boldsymbol{\Psi(x,t)}$ beschreibt die Elektronenwelle.

Die Schrödinger-Gleichung und ihre Lösungen, d.h. die Wellenfunktionen $\boldsymbol{\Psi(x,t)}$,sind **komplex-wertig,** sie haben einen **Real-** und einen **Imaginären** Teil!

Da aber physikalisch messbaren Grössen immer reell sind, bedeutet dies, dass die Wellenfunktion $\boldsymbol{\Psi(x,t)}$ nicht direkt interpretierbar ist.

Das Produkt einer komplexen Zahl $z\in\mathbb{Z}$ mit seiner konjugiert komplexen Zahl $z^*\in\mathbb{Z}$ ist reel: $zz^*\in\mathbb{R}$

Entsprechend ist auch nur das Produkt $\boldsymbol{\Psi(x,t)}$ $\boldsymbol{\Psi^*(x,t)}$ direkt physikalisch interpretierbar.

Wellenfunktion $\Psi(x,t)$

Die physikalische Interpretation der Wellenfunktion $\boldsymbol{\Psi(x,t)}$ ist in der Tat nicht leicht.
Versuchen wir es trotzdem.

$$\Psi(\vec{x},t) = \text{komplexe Wellenfunktion}$$

$$= \underbrace{A}_{\text{Amplitude}} \cdot e^{\overbrace{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}^{\text{Phase}}} \qquad \text{Ebene Welle mit Wellenvektor } \vec{k} \text{ und Kreisfrequenz } \omega$$

Folgende beiden Aussagen können über komplexwertige Wellenfunktionen getroffen werden, die ein Elektron in Raum und Zeit beschreiben sollen. Wobei nur noch Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich sind:

$\left|\Psi(\vec{x},t)\right|^2$ ist die **Wahrscheinlichkeit** $P(\vec{x},t)$ ein Elektron zu einer

Zeit t in einem **Volumen** $V = d^3\vec{x} = dx\cdot dy\cdot dz$ zu messen: $P(\vec{x},t)d^3\vec{x} = \left|\Psi(\vec{x},t)\right|^2 d^3\vec{x}$

Die **Wahrscheinlichkeit**, dass **das Elektron**, welches durch $\psi(\vec{x},t)$ beschrieben wird, **irgendwo im Raum** zu finden ist, **muss natürlich 1 sein**. Daher gilt:

$$1=\int P(\vec{x},t)d^3\vec{x}=\int\left|\Psi(\vec{x},t)\right|^2 d^3\vec{x}$$

Quantemechanische Deutung

Wellengleichung und Teilchenwellen sind komplexe Grössen mit Realteil und Imaginärteil.

Es können nur Wahrscheinlichkeiten berechnet und gemessen werden.

Es gibt keine konkreten Teilchenbahnen!
Die Annahme, es gäbe konkrete Bahnen, führt unweigerlich zu ***Widersprüchen mit experimentellen*** **Daten.**

Einige Berühmte Zitate namhafter Physiker zur Quantenmechanik

Diejenigen, die nicht schockiert sind, wenn sie zum ersten Mal mit Quantenmechanik zu tun haben, haben sie nicht verstanden. – **Niels Bohr**

Ich kann mir nicht vorstellen, dass der Liebe Gott mit Würfeln spielt! – **Albert Einstein**

Einstein, schreiben Sie Gott nicht vor, was er zu tun hat. – **Niels Bohr**

I think it is safe to say that no one understands quantum mechanics. – **Richard Feynman**

I am still confused, but on a higher level. – **Enrico Fermi**

Shut up and calculate. – **Richard Feynman**

Orbitale und Quantenzahlen

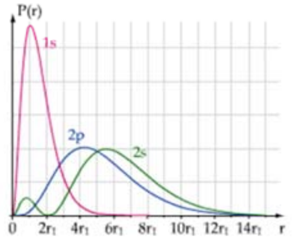
Stationäre (d.h. zeitunabhängige) Lösungen **der Wellenfunktion eines Hüllenelektrons** bezeichnet man als **Orbital** (sie beschreiben stabile Zustandsfunktionen einzelner Hüllenelektronen):

$$\Psi\left(\vec{x},t\right) \rightarrow \Psi_{n,l,m,s}\left(\vec{x}\right) \quad \text{stationäre Lösung}$$

Weitere Quantenzahlen sind nötig um alle möglichen stationären Zustände zu beschreiben:
n, ℓ, m und **s:**

n	**1,2,3,...**	**Hauptquantenzahl**
ℓ	**0,1,2,...,n-1**	**Drehimpulsquantenzahl**
m	**-ℓ, -ℓ+1,...,0,1,2,...,+ℓ**	**Magnetquantenzahl**
s	**+½, -½**	**Spinquantenzahl**

Damit lässt sich die **Aufenthaltswahrscheinlichkeit** des Hüllenelektrons an jedem Ort (x,y,z) als Funktion der Quantenzahlen n, ℓ, m und s berechnen



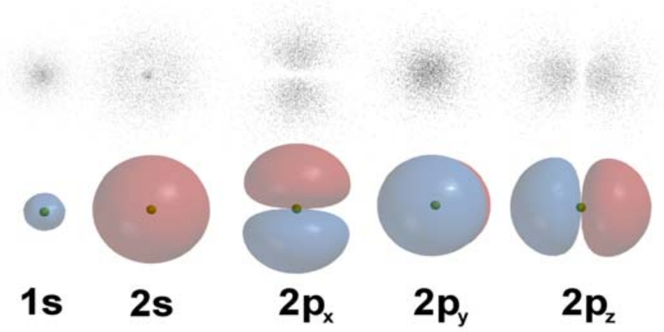
Die in der Spektroskopie gebräuchlichen Bezeichnungen 1s, 2s, 2p, etc. beziehen sich direkt auf die Quantenzahlen:

1s bedeutet:	**n=1;**	**ℓ=0;**	**m=0;**	**s=±½**
2s bedeutet:	**n=2;**	**ℓ=0;**	**m=0;**	**s=±½**
2p bedeutet:	**n=2;**	**ℓ=1;**	**m=±1,0;**	**s=±½**

Orbitale und Quantenzahlen

Quantenzahl		**Spektroskopisch übliche Nomenklatur**
n	1,2,3,...	Hauptquantenzahl: **1=K; 2=L; 3=M; ...**
ℓ	0,1,2,...,n-1	Drehimpulsquantenzahl: **0=s; 1=p; 2=d; 3=f; ...**
m	$-\ell, -\ell+1, ..., 0, 1, 2, ..., +\ell$	Magnetquantenzahl
s	$+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	Spinquantenzahl

Die **Aufenthaltswahrscheinlichkeit** des Hüllenelektrons an jedem Ort *(x,y,z)* als Funktion der Quantenzahlen n, ℓ, m und s lässt sich exakt berechnen und grafisch darstellen:



Dargestellt sind **Flächen konstanter Wahrscheinlichkeit**, wobei mit **90 % Wahrscheinlichkeit** das Elektron innerhalb der Grenzfläche zu finden ist.

1s: n=1; ℓ=0; m=0; s=±½
2s: n=2; ℓ=0; m=0; s=±½
2p: n=2; ℓ=1; m=±1,0; s=±½ **x, y, z $\triangleq$ m = -1, 0, 1**

363

Pauli Prinzip

Um auch Atome mit mehr als einem Elektron zu beschreiben, und insbesondere die gesamte Elektronenkonfiguration in der Atomhülle festzulegen, ist ein Ausschlussprinzip nötig, damit nicht alle Elektronen gleichzeitig den selben Grundzustand besetzen.

Dies hat Wolfgang Pauli 1925 in seinem Pauli-Prinzip formuliert:

In einem Atom dürfen keine Elektronen in allen 4 Quantenzahlen n, ℓ, m und s übereinstimmen.

Damit lässt sich die **Elektronenkonfiguration** jedes Atoms eindeutig bestimmen!

Wolfgang Ernst Pauli
* 25. April 1900 in Wien
† 15. Dezember 1958 in Zürich

Nobelpreis 1945
„für seine Arbeit über die Entdeckung des Pauli-Prinzips“

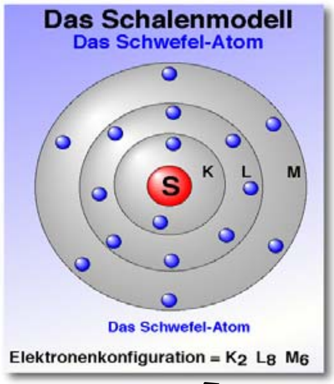
Elektronenkonfigurationen

n	ℓ 0,1,2,…,n-1	m -ℓ, -ℓ+1,…,0,1,2,…,+ℓ	s +½, -½	Anzahl Elektronen Orbitale	
1	0	0	+½, -½	2	$2=2\times1^2$
2	0	0	+½, -½	2	$8=2\times2^2$
	1	-1, 0, +1	+½, -½	6	
3	0	0	+½, -½	2	$18=2\times3^2$
	1	-1, 0, +1	+½, -½	6	
	2	-2, -1, 0, +1, +2	+½, -½	10	
4	0	0	+½, -½	2	$32=2\times4^2$
	1	-1, 0, +1	+½, -½	6	
	2	-2, -1, 0, +1, +2	+½, -½	10	
	3	-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3	+½, -½	14	

Zu jeder **Hauptquantenzahl n** gibt es $2{\times}n^2$ **Orbitale**
Im **Schalenmodell** entspricht jeder **Hauptquantenzahl** gerade einer **Schale**.
Wobei für **n** die **Bezeichnung 1=K, 2=L, 3=M, usw.** auch Heute noch anzutreffen ist.
Entsprechend spricht man von der **K-Schale**, der **L-Schale**, usw.

Elektronenkonfigurationen der ersten 20 Elemente

	n n nℓ	1 K 1s	2 L 2s	 2p	3 M 3s	 3p	 3d	4 N 4s	 4p	 4d	 4f
1	**Wasserstoff**	1									
2	**Helium**	2									
3	**Lithium**	2	1								
4	**Beryllium**	2	2								
5	**Bor**	2	2	1							
6	**Kohlenstoff**	2	2	2							
7	**Stickstoff**	2	2	3							
8	**Sauerstoff**	2	2	4							
9	**Fluor**	2	2	5							
10	**Neon**	2	2	6							
11	**Natrium**	2	2	6	1						
12	**Magnesium**	2	2	6	2						
13	**Aluminium**	2	2	6	2	1					
14	**Silicon**	2	2	6	2	2					
15	**Phosphor**	2	2	6	2	3					
16	**Schwefel**	2	2	6	2	4					
17	**Chlor**	2	2	6	2	5					
18	**Argon**	2	2	6	2	6					
19	**Kalium**	2	2	6	2	6		1			
20	**Kalzium**	2	2	6	2	6		2			



Schwefel
2 Elektronen in der K-Schale: K_2
8 Elektronen in der L-Schale: L_8
6 Elektronen in der M-Schale: M_6

Elektronenkonfiguration 4s ist energetisch günstiger als 3d (dies stimmt quantenmechanisch und experimentell überein!)

Ultimativer Erfolg der Quantenmechanik

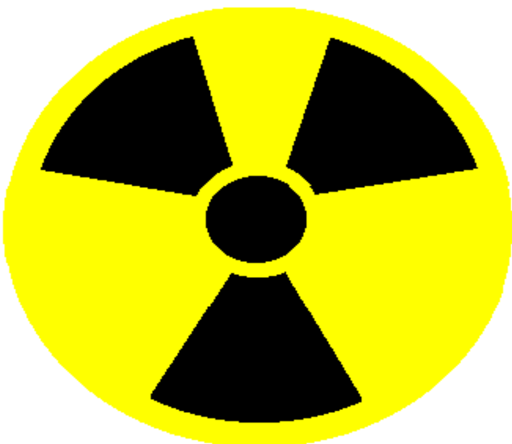
Die **Theorie der Quantenmechanik**, **deren Berechnungen bis heute in allen Details mit den experimentellen Befunden übereinstimmen**, **zeichnet mit dem Orbitalmodell ein grundsätzlich anderes Bild vom Atom, als dies aus der klassischen Physik heraus zu erwarten wäre.**

- **Ohne äußere Einwirkungen ist das Atom stationär, es gibt also keine Bewegungen von Elektronen auf Bahnen**.
- **Anders als es das Bohr-Modell annimmt, hat das Elektron beim atomaren Wasserstoff eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kern.**
- **Orbitale können mit zwei Kernen assoziiert sein und so chemische Bindungen vermitteln.**

Kernphysik

Entdeckung der Radioaktivität
α, β und γ Strahlung

Das internationale Zeichen für radioaktive Strahlung



Entdeckung der Radioaktivität

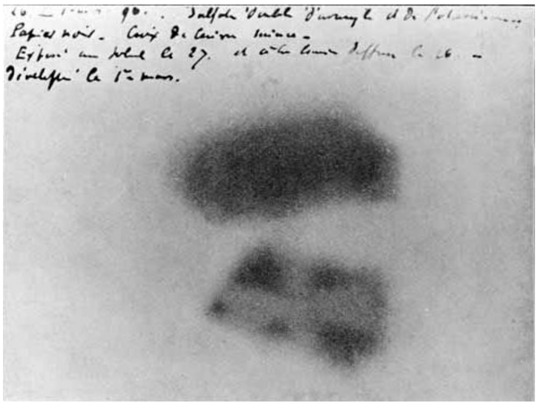
Becquerel bemerkte am **1. März 1896**, dass **Pechblende** eine **Fotoplatte schwärzte**, obwohl kein Licht einfallen konnte.

Damit bewies Becquerel, dass eine **neue Strahlung** auftrat, die sich anders als sichtbares Licht verhielt.

Antoine Henri Becquerel

* 15. Dezember 1852 in Paris
† 25. August 1908 in Le Croisic

Nobelpreis 1903
„für seine Arbeit über die Entdeckung spontaner Radioaktivität“



Becquerel´s Fotoplatte

Pechblende

Pechblende ist ein **Uranoxid,** ein häufig vorkommendes Mineral, das **Uraninit**.
Chemisches Symbol: **UO_2**
Uraninit ist das Haupterz für die Uran- und Radium-Gewinnung

Karte: Hauptvorkommen & Abbaugebiete

In der Erdkruste ist **Uran** mit einem Vorkommen von **4 mg/kg relativ häufig vertreten**.

Im normalen Boden kommt Uran als Spurenelement vor, so enthalten beispielsweise die **obersten 30 cm Erdboden (Biosphäre)** im Mittel ca. **1.5 Tonnen Uran pro km²** Bodenfläche.

Pierre und Marie Curie

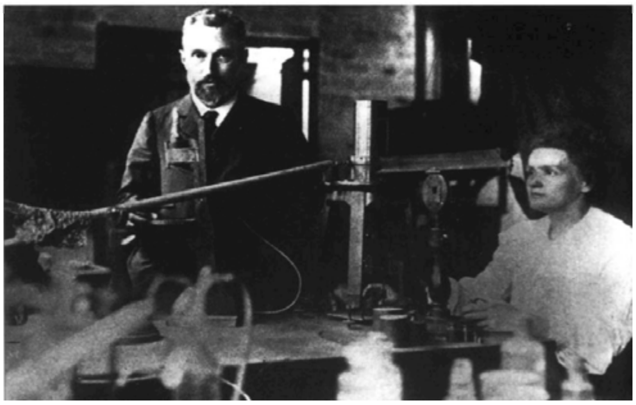
Das Ehepaar, Pierre und Marie Curie arbeiteten in der Folge an den neuen Strahlungsphänomenen, die von Becquerel entdeckt wurden.

Dafür erhielten sie 1903 gemeinsam den Nobelpreis.

Pierre Curie verstarb 1906 bei einem Kutschenunfall in den Strassen von Paris, und Marie forschte alleine weiter.

Sie isolierte die damals noch unbekannten radioaktiven Elemente Polonium und Radium. Dafür wurde sie 1906 mit einem weiteren Nobelpreis ausgezeichnet.

Ihre Tochter, Irène Joliot-Curie erhielt 1935, zusammen mit ihrem Mann Frédéric Joliot, den Nobelpreis für die Entdeckung der künstlichen Radioaktivität.



Pierre Curie
* 15. Mai 1859 in Paris
† 19. April 1906 in Paris

Marie Skłodowska-Curie
* 7. November 1867 in Warschau
† 4. Juli 1934 in Haute-Savoie

Nobelpreis für Physik 1903
„für ihre gemeinsame Arbeit über die Strahlungsphänomene, welche von Becquerel entdeckt wurden"

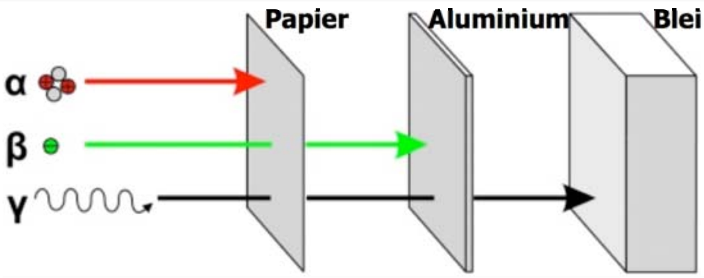
Nobelpreis für Chemie 1911
„für ihre Arbeit über die Entdeckung von Radium und Polonium"

α-, β-, und γ- Strahlen

Rutherford konnte, auf Grund **unterschiedlichem Durchdringungsverm**ögen, schon bald **drei Sorten radioaktiver Strahlung** unterscheiden. Für die drei Strahlungsarten prägte Rutherford die Bezeichnungen **Alpha-**, **Beta-** und **Gammastrahlung**.

Wobei sich herausstellte, dass:

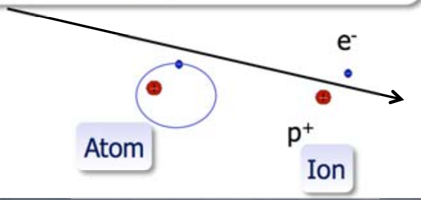
Alpha Strahlung = Helium-Kerne (geladen, Ablenkung in Magnetfeld)
Beta Strahlung = Elektronen (geladen, Ablenkung in Magnetfeld)
Gamma Strahlung= Photonen (neutral, keine Ablenkung in Magnetfeld)



Helium-Kerne sind schwer und können leicht gestoppt werden.
Elektronen streuen an Hüllenelektronen und werden nach einigen solchen Stössen gestoppt.
Photonen sind sehr durchdringend, werden aber schliesslich auch gestoppt.
Die Interaktion von Strahlung mit Materie hängt stark von der Teilchensorte ab!

Teilchen sichtbar machen: Wilson Nebelkammer

Geladene Teilchen
zBsp **Alpha, Beta, Myon, etc.,** welche durch eine gesättigte **Alkohol-atmosphäre** fliegen, **ionisieren** diese.



Alkoholmoleküle (**Ethanol, Methanol**) sind polar und **ziehen Ionen** an, dies führt zu **Kondensations-keimen** an denen die gesättigte Alkoholatmosphäre kondensiert. Es bilden sich **kleine Tröpfchen**, die schliesslich gross genug werden, um sie mit blossen Auge zu erkennen.

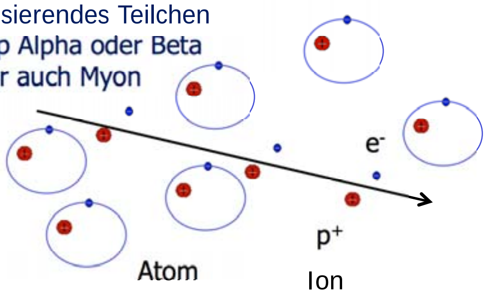
Teilchen können so anhand ihrer Kondensstreifen sichtbar gemacht werden.

Kondensstreifen von Flugzeugen sind eine gute Analogie.

Flugzeuge sind häufig nicht sichtbar, sie sind aber trotzdem gut an ihren Kondensstreifen erkennbar.
Genau dies wollen wir in der Wilson Nebelkammer ausnutzen.

Wilson Nebelkammer

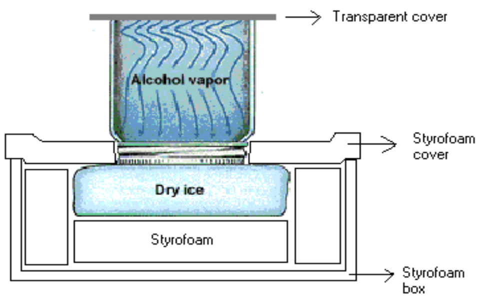
Ionisierendes Teilchen
zBsp Alpha oder Beta
oder auch Myon



Entsprechend dem **Ionisationsvermögen** des Teilchens entstehen **dicke oder dünne Kondensstreifen**.

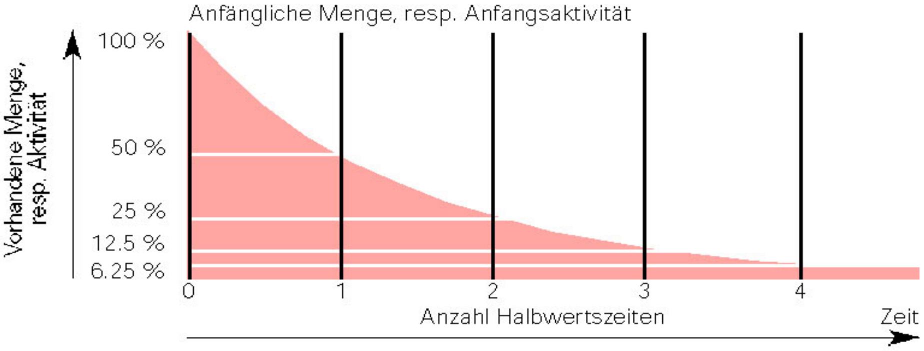
Teilchen **laufen gerade (Alpha, Myon,..)** oder werden **mehrfach gestossen (Beta)**.

→ Alpha, Beta, Myon etc. lassen sich visuell unterscheiden!

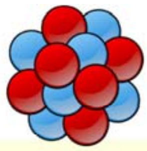


Kernphysik

- **Aufbau der Kerne**
- **Kernzerfälle**
- **Zerfallsgesetz**



Aufbau der Atomkerne



Ein **Atomkern** besteht aus **Z positiv geladenen Protonen** und **N neutralen Neutronen**. Protonen und Neutronen, werden dann auch **Nukleonen** genannt, da sie die Bestandteile des Kerns sind.

Atomkerne haben **Radien** von ca. **1 fm** im Fall von Wasserstoff bis ca. **8 fm** für schwere Kerne. Entsprechend lässt sich so die **Dichte von Kernmaterie** bestimmen, die konstant ist für alle Kerne:

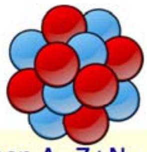
$$\rho_{\text{Kern}} = \frac{m_{\text{Kern}}}{V_{\text{Kern}}} = \frac{m_{\text{Atom}} - Z \cdot m_{\text{Elektron}}}{\frac{4\pi}{3} r_{\text{Kern}}^3} = 2 \times 10^{17}\,\text{kg}\,\text{m}^{-3} = 2 \times 10^{14} \cdot \rho_{\text{Wasser}}$$

Die Kernladungszahl Z, d.h. die Anzahl der Protonen, definiert eindeutig das chemische Element.

Die **Zahl der Neutronen**, bei gegebener Kernladungszahl Z, kann variieren ohne dass dabei die chemischen Eigenschaften beeinflusst werden. Zu jedem chemischen Element gibt es entsprechend eine Anzahl verschiedener **Isotope**, die sich durch die Masse voneinander unterscheiden.

Verschiedene **Isotope** eines Elements sind **meist radioaktiv** und zerfallen via **Alpha-**, oder **Betazerfall**. Dabei treten **unterschiedliche Lebensdauern** auf, von äusserst kurzlebig, bis zu extrem langlebig, kommen alle Werte vor.

Isotope $^{A}_{Z}X_{N}$



Um ein **Isotop** zu bezeichnen, wird die **Massenzahl A**, d.h. die Anzahl der Nukleonen A=Z+N, **oben links** neben dem **Elementsymbol X** geschrieben.
Die **Kernladungszahl Z** ist zwar schon durch das Elementsymbol X gegeben, sie kann aber trotzdem **unten links** zum Elementsymbol X geschrieben werden.
Unten rechts kann fakultativ die **Zahl der Neutronen N** geschrieben werden.

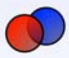
zBsp gelten so für Uran-235 folgende, alle eindeutigen, Bezeichnungen:

$$^{235}_{92}U_{143} \rightarrow \, ^{235}_{92}U \rightarrow \, ^{235}U \rightarrow \, ^{235}\mathrm{Uran}$$

Von **Wasserstoff H** sind 7 Isotope bekannt, wobei 3 davon natürlich vorkommen; **^{1}H** ist mit einer relativen Häufigkeit von 99.9885% das häufigste Isotop, **Deuterium ^{2}H** ist ebenfalls stabil, während alle weiteren Isotope ^{3}H bis ^{7}H instabil sind.
Tritium ^{3}H hat eine Halbwertszeit von 12.32 Jahren und wird in einer **Kernreaktion**, die durch kosmische Strahlung in der Atmosphäre natürlich abläuft, immerzu neu erzeugt.

^{1}H stabil 99.9885%

normaler Wasserstoff (Protium)



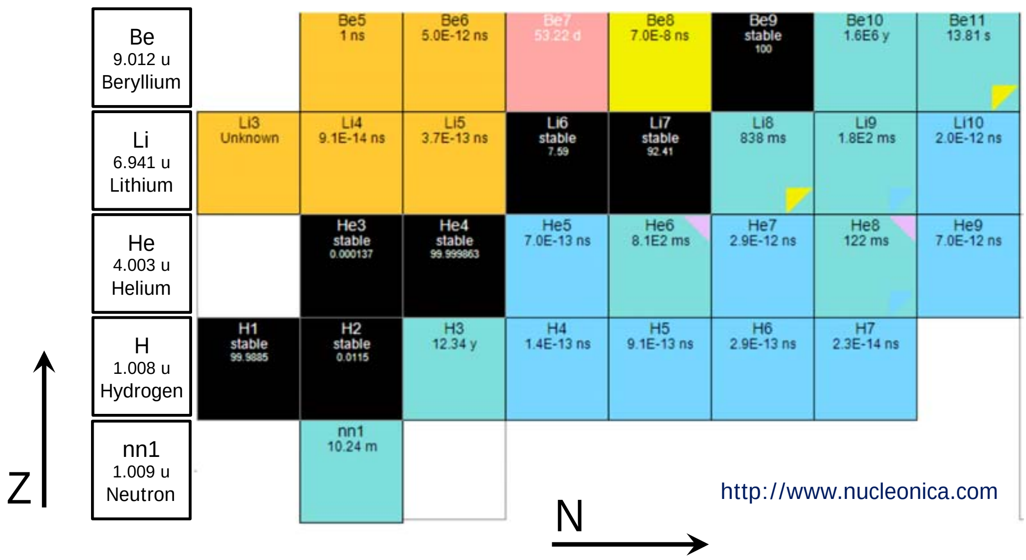
^{2}H stabil 0.0115%

schwerer Wasserstoff (Deuterium)

^{3}H $T_{½} = 12.32\,\mathrm{y}$ Spuren

superschwerer Wasserstoff (Tritium)

Nuklidkarte

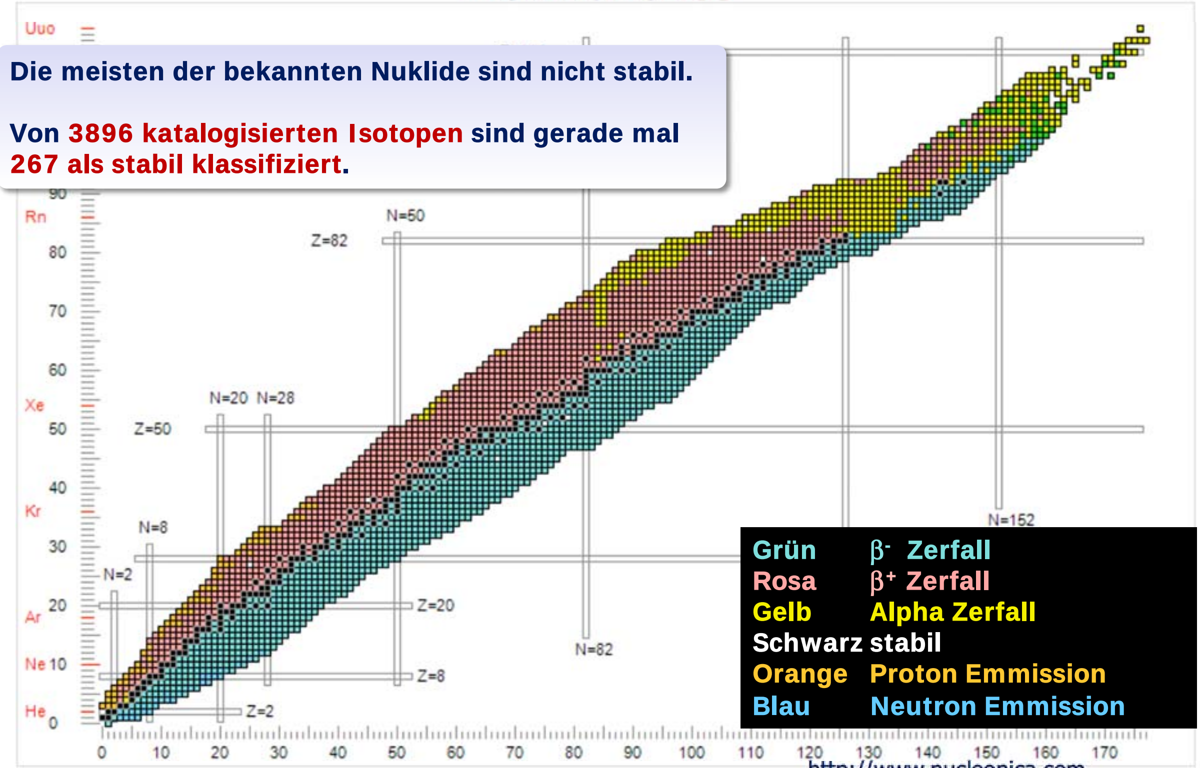


Die Nuklidkarte enthält alle bekannten Isotope, die in einem kartesischen Koordinatensystem organisiert ist. Dabei definiert die Zahl der Neutronen **N die Abszisse** und die Kernladungszahl **Z die Ordinate**. Isotope eines Elements sind so in horizontalen Linien ersichtlich. **Stabile Isotope** sind **schwarz** eingezeichnet, während **instabile Isotope** entsprechend ihrer Zerfallsart **farbig** eingezeichnet sind.

Nuklidkarte

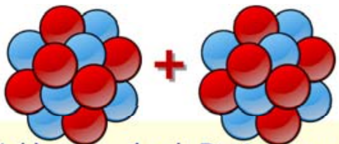
Die meisten der bekannten Nuklide sind nicht stabil.

Von 3896 katalogisierten Isotopen sind gerade mal 267 als stabil klassifiziert.



http://www.nucleonica.com

Kernreaktionen



Kommen zwei Isotope miteinander in Berührung, können sich die Nukleonen, durch **Protonen- und Neutronenaustausch** zu komplett **neuen Isotopen** formieren; man spricht hier von einer **Kernreaktion**.

$$ {}^{A_1}_{Z_1}X_{N_1} + {}^{A_2}_{Z_2}Y_{N_2} \rightarrow {}^{A_3}_{Z_3}V_{N_3} + {}^{A_4}_{Z_4}W_{N_4} \qquad \text{zBsp} \quad {}^{6}_{3}\mathrm{Li} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} $$

Es kommt dabei zu **Elementumwandlungen**; dieser Vorgang entspricht sozusagen dem **Stein der Weisen,** der in der Alchemie vergeblich gesucht wurde.

Dabei bleiben die **Summe der Protonen** und die **Summe der Neutronen** jeweils einzeln **erhalten**.

$$ A_1 + A_2 = A_3 + A_4 \quad Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4 \quad N_1 + N_2 = N_3 + N_4 $$

Damit es zu einer Kernreaktionen kommen kann, muss die **Coulombkraft** zwischen den beiden **positiv geladenen Isotopen** überwunden werden. Dies gelingt nur, wenn die Kerne mit **genügend hoher Geschwindigkeit** aufeinander treffen. Eine Ausnahme bilden Kernreaktionen mit Neutronen, hier gibt es keine Coulombabstossung.

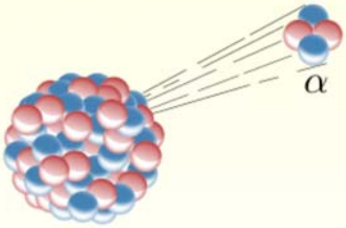
Ein Beispiel dazu ist die Erzeugung von **Tritium**, welches entsteht wenn ein **Neutron** auf einen **Stickstoffkern** trifft:

$$ \text{Tritiumerzeugung:} \qquad {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} $$

Kernzerfälle: Alpha-Zerfall

Die meisten Isotope sind nicht stabil, sie zerfallen nach einiger Zeit in eine **energetisch günstigere Konfiguration**. Von den **3896** bekannten und katalogisierten **Isotopen** sind gerade mal **267 stabil**.

Am einfachsten zu verstehen ist der **Alpha-Zerfall**: Hier werden aus einem Kern **2 Neutronen und 2 Protonen** zusammen als ein **Heliumkern** herausgeschleudert.

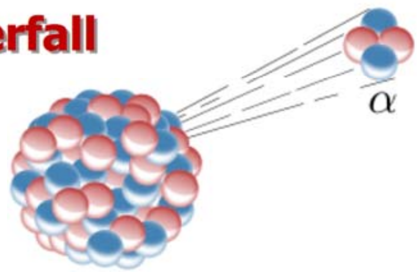


Entsprechend gilt:

$$\alpha\text{-Zerfall} \qquad {}^{A}_{Z}X_{N} = {}^{A-4}_{Z-2}Y_{N-2} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

wobei ersichtlich ist, dass die Zahl der Protonen und die Zahl der Neutronen beim Alpha-Zerfall jeweils einzeln erhalten sind.

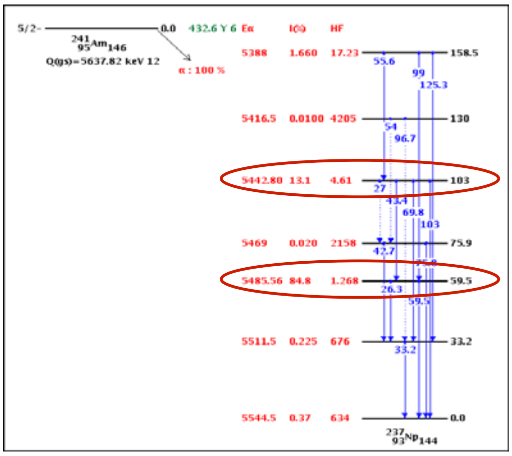
Beispiel zum Alpha-Zerfall



Americium-241 zerfällt mit **$T_{1/2}$=432.6 Jahren** in **Neptunium-237** und ein **Alpha-Teilchen**:

$$^{241}_{95}Am \rightarrow {}^{237}_{93}Np + {}^{4}_{2}He$$

Das α-Teilchen schiesst mit einer kinetischen Energie von E_α=5.5MeV aus dem ^{241}Americium Kern heraus.



Das Neptunium wird nicht in seinem Grundzustand erzeugt.

In **13.1%** der α-Zerfälle von ^{241}Am ist das Neptunium in einem mit 103 keV angeregten Zustand.

In **84.1%** der α-Zerfälle von ^{241}Am ist das Neptunium in einem mit 59.5 keV angeregten Zustand.

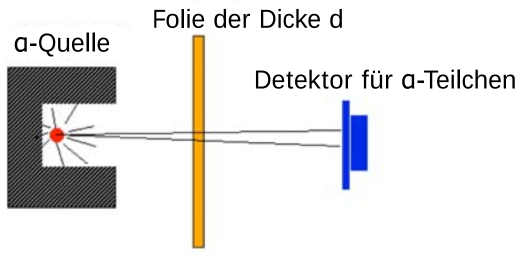
Durch **Aussenden eines oder mehrerer Photonen** erreicht Neptunium schliesslich seinen **Grundzustand**.

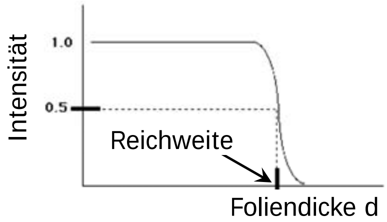
Alpha-Strahlung

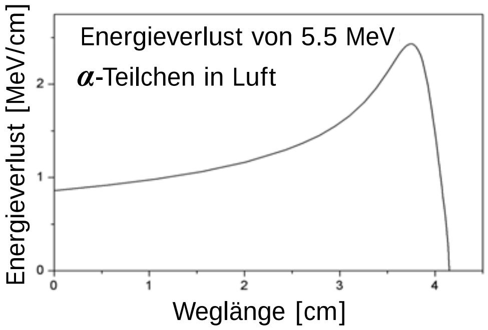
α-**Teilchen** sind **Helium-Kerne**; entsprechend sind sie **zwei-fach positiv geladen** und haben eine **Masse von 3.7 GeVc^{-2}**.

Durchdringt ein α-Teilchen Materie, werden die **Atome** dieser Materie **ionisiert,** d.h. es werden Hüllenelektronen aus Atomen herausgeschleudert.

Das α-Teilchen verliert bei jedem Stoss kinetische Energie bis es schliesslich stoppt. In Luft verlieren α-Teilchen ca. 1 MeV pro cm Wegstrecke.







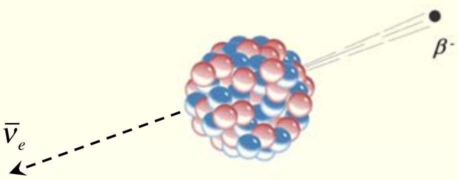
Da α-Teilchen viel schwerer sind als Elektronen, ist ihre Spur gerade und stoppt abrupt.

Kernzerfälle: Beta-Zerfall

Beim **Beta-Zerfall** sind die Anzahl der Protonen und Neutronen nicht mehr einzeln erhalten. Der Grund ist in der Art der Wechselwirkung zu suchen. Kernreaktionen und Alpha-Zerfälle unterliegen der starken Wechselwirkung, während bei Zerfällen in denen Neutrinos vorkommen prinzipiell die schwache Wechselwirkung im Spiel ist.
Die **Massenzahl A=Z+N bleibt aber Erhaltungsgrösse!**

Man unterscheidet zwei Arten des Beta-Zerfalls:

Beim **Beta-Minus-Zerfall** wandelt sich ein **Neutron n** in ein **Proton p** um und dabei wird ein **Elektron e$^-$** und ein **Anti-Elektron-Neutrino $\bar{\nu}_e$** ausgesandt.



Beim **Beta-Plus-Zerfall** wandelt sich ein **Proton p** in ein **Neutron n** um und dabei wird ein **Positron e$^+$** (Anti-Elektron) und ein **Elektron-Neutrino ν_e** ausgesandt.

Die Ladung bleibt erhalten.

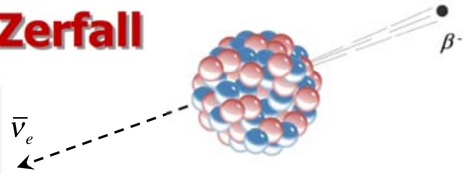
$$\beta^- \text{-Zerfall} \qquad {}^{A}_{Z}X_N = {}^{A}_{Z+1}Y_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e$$

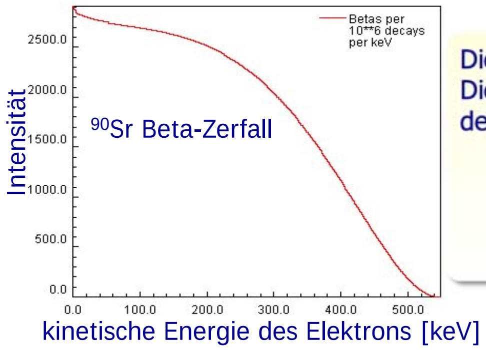
$$\beta^+ \text{-Zerfall} \qquad {}^{A}_{Z}X_N = {}^{A}_{Z-1}Y_{N+1} + e^+ + \nu_e$$

Beispiel zum Beta-Zerfall

Strontium-90 zerfällt mit **$T_{1/2}$=28.9 Jahren** in **Yttrium-90**, ein **Elektron** und ein **Anti-Elektron-Neutrino**:

$$^{90}_{38}Sr \rightarrow {}^{90}_{39}Y + e^- + \bar{\nu}_e$$





Die **kinetische Energie des Elektrons** folgt einer **Verteilung**. Die **mittlere** und die **maximal** vorkommende kinetische Energie des Elektrons ist hier:

$$\bar{E}_e = 196 \text{ keV}$$

$$E_{e,\max} = 546 \text{ keV}$$

http://ie.lbl.gov/education/isotopes.htm

Der **Beta-Zerfall** ist ein **Drei-Körper Zerfall**. Wenn das Neutrino in Ruhe produziert wird, hat das Elektron gerade die höchst mögliche kinetische Energie $E_{e,max}$.

Wolfgang Pauli hat deshalb das **Neutrino schon 1933 postuliert** – erst **1956** konnten Neutrinos **erstmals experimentell nachgewiesen** werden.

Beta-Strahlung

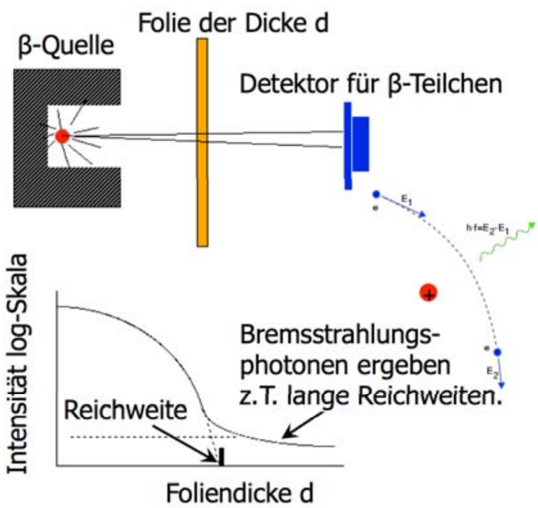
β-Teilchen sind **Elektronen**; entsprechend sind sie **einfach negativ geladen** und haben **eine Masse von 511 keVc^{-2}**.

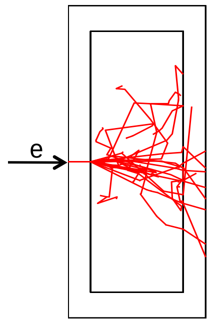
Durchdringt ein β-Teilchen Materie, **streut es an Hüllenelektronen und an Kernen**.

Bei jedem **Stoss an einem Hüllenelektron** verliert das β-Teilchen kinetische Energie.

Wenn es **an Kernen abgelenkt** wird, verliert das β-Teilchen Energie durch **Bremsstrahlung**.

Da β-Teilchen leicht sind, treten **grosse Streuwinkel** auf.



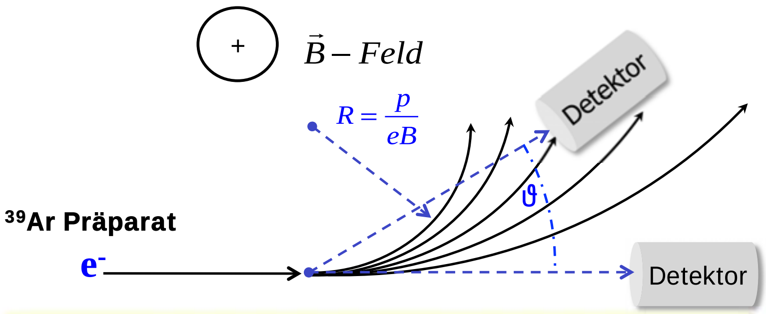


Überlagerte Spuren von Elektronen mit jeweils gleicher Eintrittsenergie und gleichem Eintrittswinkel.

Jedes Elektron beschreibt einen eigenen zufälligen Weg.

Die Spur des β-Teilchens ist alles andere als gerade. Man kann nur eine mittlere Reichweite definieren.

Energieverteilung der Elektronen beim Beta-Zerfall



$$\vec{F}_{Lorentz} = e\vec{v}\times\vec{B} = e\left|\vec{B}\right|\left|\vec{v}\right|$$

$$\vec{F}_{Zentripetal} = \frac{mv^2}{R}$$

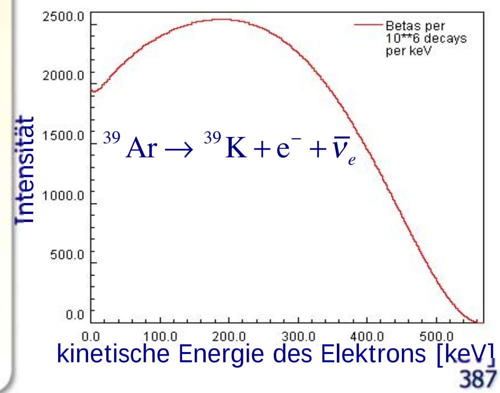
$$\Rightarrow \quad eBv = \frac{mv^2}{R} = \frac{p}{R}v$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{p}{eB}$$

Wenn sich Elektronen durch ein **B-Feld** bewegen, wirkt eine **Lorentzkraft**, die die Elektronen auf eine **Kreisbahn** zwingt. Der **Krümmungsradius R** bei konstantem **B-Feld**, hängt vom **Impuls p** des Elektrons ab**.**

Schnelle Elektronen werden dabei **weniger stark gekrümmt** als langsame. Ein um den **Winkel ϑ drehbarer Detektor**, misst daher immer genau diejenigen Elektronen, die gerade den **passenden Impuls** haben.

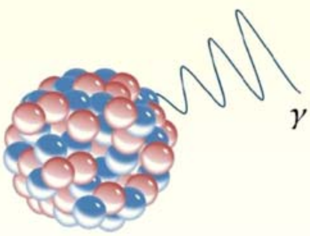
Man erhält so ein **Intensitätsspektrum als Funktion des Drehwinkels ϑ**. Dies ist gleichbedeutend einem **Intensitäts-spektrum** als Funktion der **kinetischen Energie** der Elektronen.



Kernzerfälle: Gamma-Zerfall

Gammastrahlung entsteht **als Folge eines vorhergehenden α- oder β-Zerfall** eines Atomkerns.

Der nach dem Zerfall zurückbleibende Kern, das sogenannte **Tochternuklid**, befindet sich in der Regel in einem **angeregten Zustand**.
So wie Atome angeregt sein können, wenn ihre Elektronenkonfiguration nicht dem Grundzustand entspricht, können **Kerne angeregt** sein, wenn die **Konfiguration der Nukleonen** (Neutronen und Protonen) sich **nicht im Grundzustand** befindet.



Angeregte Kerne werden mit einem ***** oben rechts, neben dem Elementsymbol, bezeichnet.

$$\gamma\text{-Zerfall} \qquad {}^{A}_{Z}X^{*}_{N} = {}^{A}_{Z}X_{N} + \gamma$$

Beim **Übergang** in einen weniger angeregten Zustand oder den Grundzustand wird **γ-Strahlung** ausgesandt. Die Zahl der Protonen und Neutronen wird dabei nicht verändert.

Beispiel zur Gamma-Strahlung

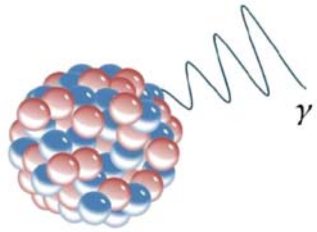
Radium-226 zerfällt mit einer Halbwertszeit **$T_{1/2}$=1600 Jahren** in **Radon-222** und ein **Alpha-Teilchen**.
Das Alpha-Teilchen kommt nicht weit, und wird im Bleimantel, welcher das Radium Präparat umhüllt, sofort absorbiert.

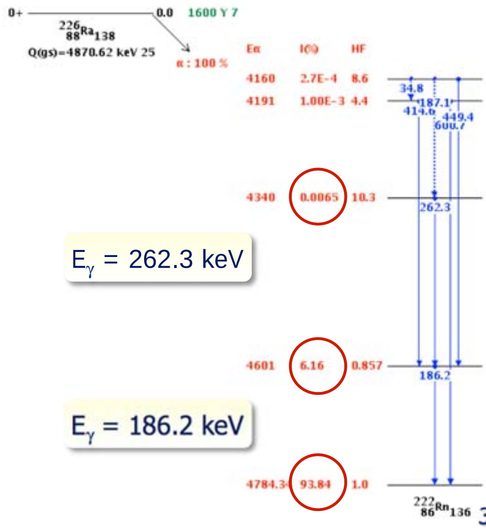
$$^{226}_{88}Ra \rightarrow \, ^{222}_{86}Rn^* + \alpha$$
$$\hookrightarrow \, ^{222}_{86}Rn + \gamma$$

Der **Tochterkern Radon-222** befindet sich in **93.84%** der Alpha-Zerfälle im **Grundzustand**, und es wird kein Photon abgestrahlt.

In **6.16%** der Fälle ist das Radon-222 jedoch in einem **angeregten Zustand** und gibt ein **186.2 keV Photon** ab, um so in seinen Grundzustand zu kommen.

In **0.0065%** der Fälle ist das Radon-222 noch **höher angeregt**, entsprechend ist dabei die Energie des Alpha-Teilchens kleiner, sodass nun erst ein **262.3 keV Photon** abgestrahlt **gefolgt von einem 186.2 keV Photon**, um so in zwei Schritten in den Grundzustand zu gelangen.





Gamma-Strahlung

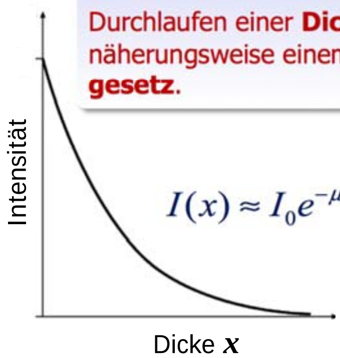
Photonen wechselwirken mit Materie durch

a) Photoeffekt
b) Compton-Streuung
c) Paarbildung

Dabei verlieren sie Energie und werden schliesslich in der Materie absorbiert.

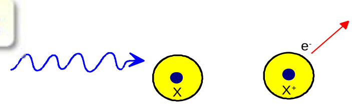
Die Reichweite ist nicht wohldefiniert.

Die Intensität der Gammastrahlung nach Durchlaufen einer **Dicke x** folgt dabei näherungsweise einem **Exponential-gesetz.**



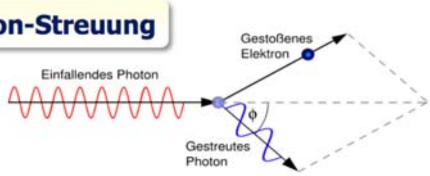
$$I(x) \approx I_0 e^{-\mu x}$$

Photoeffekt



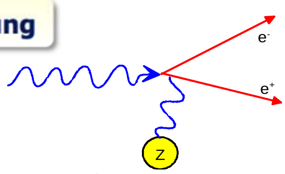
$$\gamma + \text{Atom} \rightarrow \text{Atom}^+ + e^-$$

Compton-Streuung



$$\gamma + e \rightarrow \gamma' + e'$$

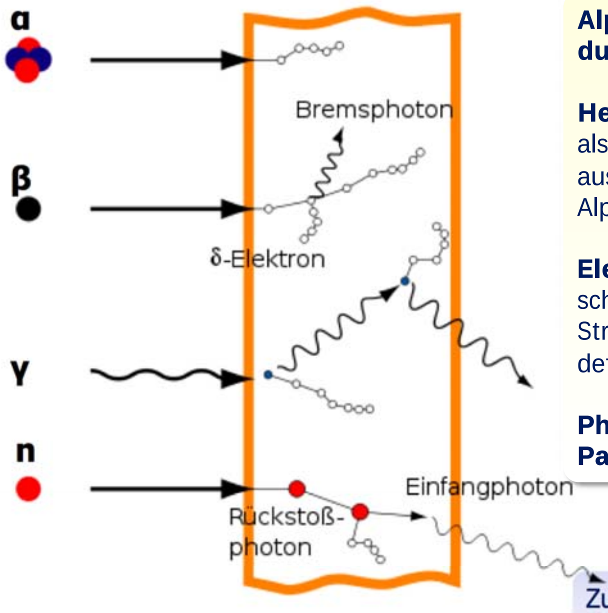
Paarbildung



$$\gamma + Kern \rightarrow e^+ e^- + Kern$$

Nur möglich falls: $E_\gamma > 2 m_e c^2 = 1022$ keV

Zusammenfassung



Alpha- und Beta-Teilchen ionisieren Materie durch Stösse an Hüllenatomen.

Helium-Kerne (**Alpha-Teilchen)** sind viel schwerer als Elektronen, die die Atomhüllen der Materie ausmachen. Deshalb erfolgt eine gerader Weg des Alphas mit einer definierter Reichweite.

Elektronen (Beta-Teilchen) stossen an gleich-schweren Hüllenelektronen. Es entstehen dabei grosse Streuwinkel, und es kann nur eine mittlere Reichweite definiert werden.

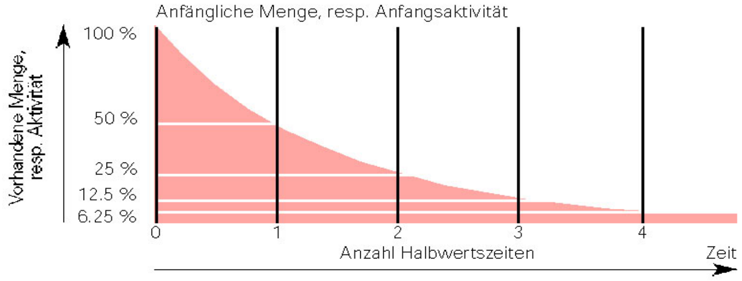
Photonen machen **Photoeffekt**, **Comptoneffekt** und **Paarbildung**. Es gibt keine definierte Reichweite.

Zusätzlich können auch **Neutronen**, **Protonen**, **Myonen**, **Pionen**, **Atomkerne**, zBsp **^{12}C**, etc. mit Materie wechselwirken.

Zerfallsgesetz

Ein radioaktives Präparat zerfällt exponentiell.

Die nach einer Halbwertszeit verbliebene Menge einer radioaktiven Substanz halbiert sich im Lauf der nächsten Halbwertszeit.



Die Anzahl der Zerfälle pro Sekunde dN/dt ist proportional zur Anzahl noch verbleibender Kerne N(t):

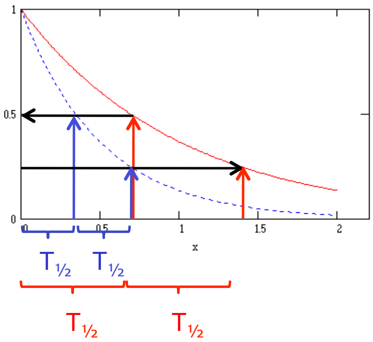
$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \quad \text{daraus folgt für den zeitlichen Verlauf:} \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Die Proportionalitätskonstante λ ist die **Lebensdauer**. Sie steht mit der **Halbwertszeit** $T_{½}$ wie folgt in Beziehung:

$$N(T_{½}) \equiv \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{½}} \quad \Rightarrow 2 = e^{\lambda T_{½}} \quad \Rightarrow \lambda T_{½} = \ln 2 \quad \Rightarrow T_{½} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Halbwertszeiten von Zerfällen

Element	Symbol	Hauptsächlicher Zerfall	Halbwertszeit
Tellur	^{128}Te	2 β^- (not measured)	$2.2 \cdot 10^{24}$ Jahre
Hafnium	^{174}Hf	α(2.5 MeV)	$2 \cdot 10^{15}$Jahre
Thorium	^{232}Th	α(4.0MeV)	14.05 Mrd. Jahre
Uran	^{238}U	α(4.2 MeV)	4.468 Mrd. Jahre
Uran	^{235}U	α(4.3 MeV)	704 Mio.Jahre
Plutonium	^{239}Pu	α(5.1 MeV)	24´110 Jahre
Kohlenstoff	^{14}C	β^- (156.5 keV max)	5´730 Jahre
Radium	^{226}Ra	α(4.8 MeV)	1´602 Jahre
Plutonium	^{238}Pu	α(5.5 MeV)	87.74 Jahre
Cäsium	^{137}Cs	β^- (514.0 keV max)	30.2 Jahre
Europium	^{152}Eu	β^+ (730.5 keV max)	13.6 Jahre
Tritium	^{3}H	β^- (18.59 keV max)	12.36 Jahre
Schwefel	^{35}S	β^- (167.1 keV max)	87.5 Tage
Radon	^{222}Rn	α(5.5 MeV)	3.8 Tage
Francium	^{223}Fr	β^- (1716 keV max)	14.2 Minuten
Thorium	^{223}Th	α(7.3 MeV)	0.6 Sekunden
Polonium	^{212}Po	α(8.8 MeV)	0.3 µs
Beryllium	^{8}Be	α(not measured)	$9 \cdot 10^{-17}$ s
Wasserstoff	^{7}H	2 N (not measured)	$2.3 \cdot 10^{-23}$ s



Halbwertszteiten $T_{1/2}$ und Zerfallsart für verschiedene Isotope.
Geordnet nach $T_{1/2}$.

Aktivität [Bq]

Unter **Aktivität** versteht man die Anzahl der Zerfälle pro Sekunde eines radioaktiven Präparates, die Einheit ist demnach **s^{-1}** und wird als **Becquerel** [Bq] bezeichnet.

Aktivität einer radioaktiven Quelle: $$A \equiv \frac{\text{Anzahl Zerfälle}}{\text{Sekunde}} \quad [\text{Bq}] \quad (\text{Becquerel})$$

Eine radioaktive Substanz besitzt eine Aktivität von 1 Bq, wenn pro Sekunde im Mittel 1 Atomkern zerfällt.

zBsp was ist die Aktivität von 1 Kg ^{238}U ?

$$T_{1/2} = 4.47 \cdot 10^9 \,\text{Jahre} = 1.41 \cdot 10^{17}\,\text{s}$$

$$\text{Anzahl Mol in 1 kg Uran: } m = \frac{1000\,\text{g}}{238\,\text{gMol}^{-1}} = 4.2 \text{ Mol}$$

$$\text{Anzahl Kerne in 1 kg Uran: } N = N_A \cdot m = 6 \cdot 10^{23} \times 4.2 = 2.52 \cdot 10^{24} \text{ Kerne}$$

$$\text{Aktivität } A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N = \frac{0.693 \cdot 2.52 \cdot 10^{24}}{1.41 \cdot 10^{17}\,s} = 1.24 \cdot 10^7\, s^{-1} = 1.24 \cdot 10^7\, Bq$$

Aktivität [Bq]

Aktivität hängt eng mit dem Zerfallsgesetz zusammen. Kennt man die Anzahl der Kerne in einem Präparat, und die dazugehörige Halbwertszeit $T_{½}$, kann man daraus die Aktivität bestimmen:

$$\text{Aktivität } A = \frac{\ln 2}{T_{½}} \cdot \text{Anzahl radioaktiver Kerne einer Quelle } [Bq]$$

Insbesondere gilt:

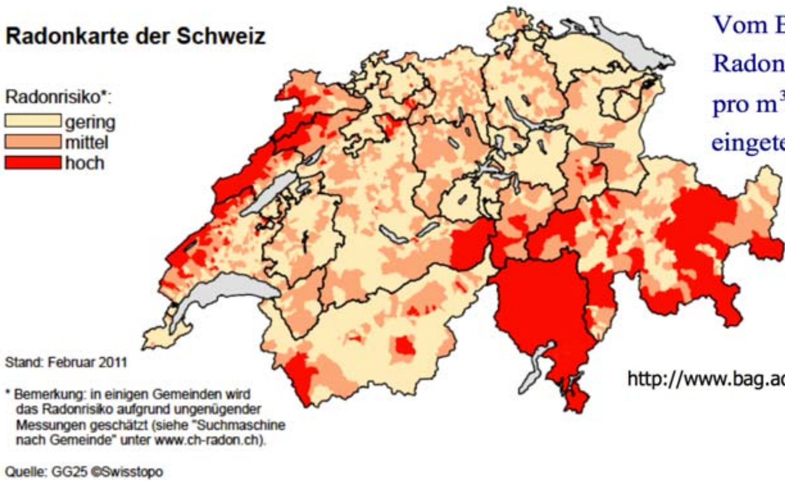
Je grösser die Halbwertszeit $T_{½}$ einer radioaktiven Quelle, desto geringer ist ihre Aktivität – bei gleicher Anzahl Kerne.

So ist die Aktivität von **1 kg Uran-238** um **11 Grössenordnungen kleiner**, als die von **1 kg Radon-222**:

$$1\text{ kg } {}^{238}U \quad \rightarrow \quad T_{½} = 4.47 \text{ Mia. Jahre} \quad \rightarrow \quad A = 1.2 \cdot 10^{7}\, Bq$$

$$1\text{ kg } {}^{222}Rn \quad \rightarrow \quad T_{½} = 3.8 \text{ Tage} \quad \rightarrow \quad A = 5.7 \cdot 10^{18}\, Bq$$

^{222}Radon in der Schweiz



Vom Bundesamt für Gesundheit erstellte Radonkarte, wobei die Radon Aktivitäten pro m^3-Atemluft in folgende Risikogruppen eingeteilt wurden:

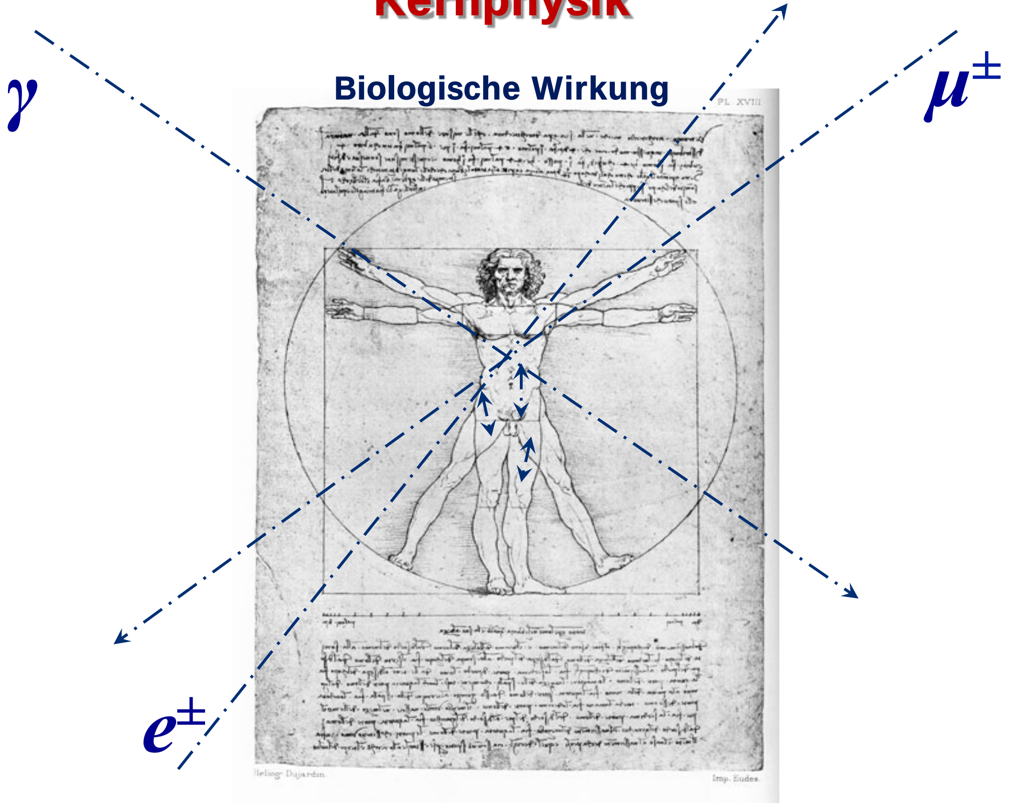
$$\text{Hoch} > 200\ \text{Bq}\,\text{m}^{-3}$$
$$\text{Mittel} > 100 - 200\ \text{Bq}\,\text{m}^{-3}$$
$$\text{Gering} < 100\ \text{Bq}\,\text{m}^{-3}$$

http://www.bag.admin.ch/themen/strahlung

Radon ist ein natürliches radioaktives Edelgas das in der Uranzerfallsreihe ständig produziert wird, entsprechend der natürlichen **Urankonzentration** im Boden und der **Durchlässigkeit** des Bodens für Radongas.

Kernphysik

Biologische Wirkung



Biologische Wirkung radioaktiver Strahlung

Wenn **geladene Teilchen** durch Materie stossen, werden **Elektronen aus Elektronenhüllen herausgeschlagen**. Dabei entstehen Ionen – daher auch der Name **ionisierende Strahlung**.

Dabei werden **chemische Bindungen aufgebrochen** und es entstehen chemische Radikale, was der biologisch schädlichen Wirkung zu Grunde liegt.

Da Lebewesen zu einem grossen Teil aus Wasser bestehen, entstehen beim Einwirken ionisierender Strahlung primär OH^- Ionen.

Im Laufe der Evolution haben alle Lebewesen Strategien entwickelt OH^- Ionen und weitere Radikale zu neutralisieren, was bis zu einer bestimmten Dosis gut gelingt.

Körperzellen welche sich ständig erneuern sind am meisten gefährdet durch Strahlung irreversible Schäden zu erleiden.

Rückenmark bei der Bildung von roten Blutkörperchen
Gonaden (Hoden, Eierstöcke)
Dünndarm

Das Hirn ist im Gegensatz dazu im Vergleich äusserst robust gegen Einwirkung ionisierender Strahlung!

Energie-Dosis [Gy]

Die Wirkung radioaktiver Strahlung auf biologisches Gewebe hängt von der Energie ab die pro kg Gewebe absorbiert wurde.

Es ist nicht wichtig wie viele Teilchen durch einen Körper fliegen, sondern, wie viel Energie im Körper dabei deponiert wird.

Die pro kg Gewebe absorbierte Energie wird in Gray [Gy] gemessen.

Energiedosis Einheit: Gray (Gy)

Die Energiedosis charakterisiert die in Materie absorbierte Strahlenmenge.
1 Gray entspricht der Energie in Joule (J), die von 1 Kilogramm Materie aus der Strahlung absorbiert wird:

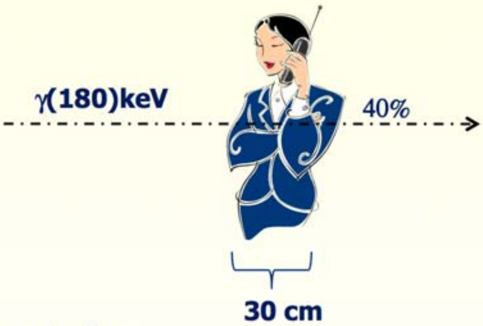
$$1\,\mathrm{Gy} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

Beispiel zu Energie-Dosis

Eine **Radon-220 Quelle** emittiert Photonen mit einer Energie von $\mathbf{E_\gamma=180\ keV}$.

Diese Photonen erzeugen **Photoeffekt** und **Compton-Streuung** im Gewebe, wobei z.T. energetische **Elektronen** erzeugt werden, die Ionisation im Gewebe bewirken.
Photonen zählen deswegen auch zu den ionisierenden Strahlen, obwohl sie eigentlich neutral sind.

100 keV Photonen deponieren im Mittel 60% ihrer Energie innerhalb 30 cm Gewebe; der Rest fliegt "hinten wieder raus"

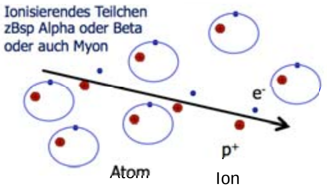


D.h. **pro Photon wird im Mittel $0.6\times180\,\mathrm{keV} = 108\ \mathrm{keV}$ Energie deponiert.**

1 Joule sind 6.2×10^{15} keV d.h. um eine **Energiedosis von einem Joule** zu erreichen, müssen $6.2\times10^{15}\,\mathrm{keV}/108\ \mathrm{keV}=$ **5.7×10^{13} Photonen** auf die Person treffen.

Angenommen die Person **wird gleichmässig bestrahlt** und sie sei **60 kg schwer**, dann müssten **3.4×10^{15} dieser Photonen auf die Person treffen.**

Dies entspräche 1/60 Gray gleichmässiger Bestrahlung, was nicht akut gefährdend ist, aber einer erhebliche Strahlenbelastung gleich kommt.



Ionen Dosis [C/kg]

Die **Ionendosis** quantifiziert die Strahlenmenge anhand der durch sie hervorgerufenen Ionisation, sie wird in **Coulomb pro kg** gemessen.

1 C/kg entspricht 1.6×10^{19} Elektronen, die in 1 kg Materie durch die Strahlung freigesetzt werden.

Die **Ionisationsenergie**, ist die Energie die nötig ist um ein Hüllenelektron von seinem Atom zu separieren. Diese Energie beträgt einige eV pro Atom (siehe dazu das Bohr´sche Atommodell).

Die Energiedosis D (gemessen in Gray) und die Ionendosis J (gemessen in C/kg) stehen somit in direkter Relation.

$$D[Gy] = \kappa \cdot J[{}^{C}/_{kg}]$$

Wobei die Konstante κ vom Material abhängt.

Für Wasser, was biologischem Gewebe nahe kommt, ist $\kappa = 37\frac{\mathrm{Gy}}{\mathrm{J}/\mathrm{kg}}$ **.**

Sievert – Äquivalentdosis

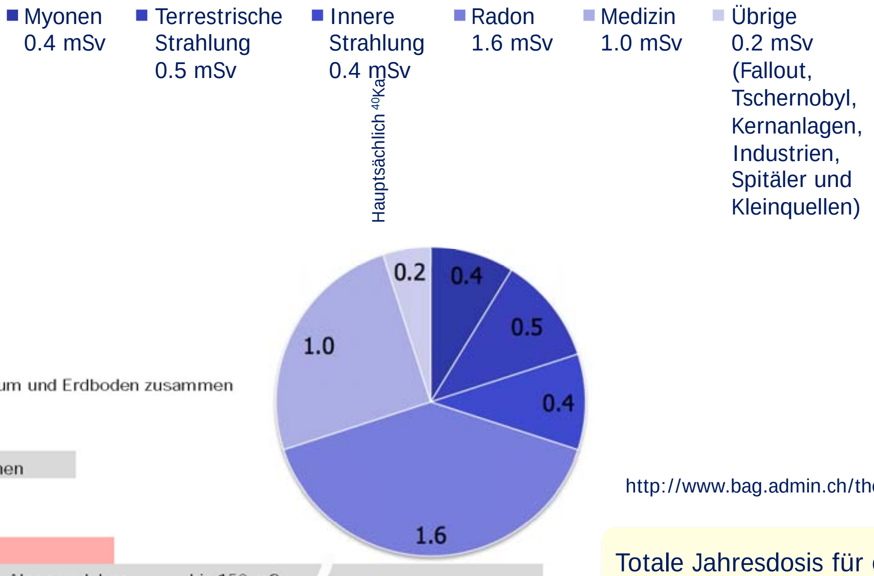
Die Äquivalentdosis entspricht einer **Abschätzung der absorbierten Strahlenmenge unter Berücksichtigung ihrer biologischen Wirkung**, wobei das **Gray [J/kg],** sowie **ein empirischer Qualitätsfaktor Q**, der **Äquivalentdosis** zugrunde liegt.
Die Äquivalentdosis wird in Sievert [Sv] gemessen, wobei gilt:

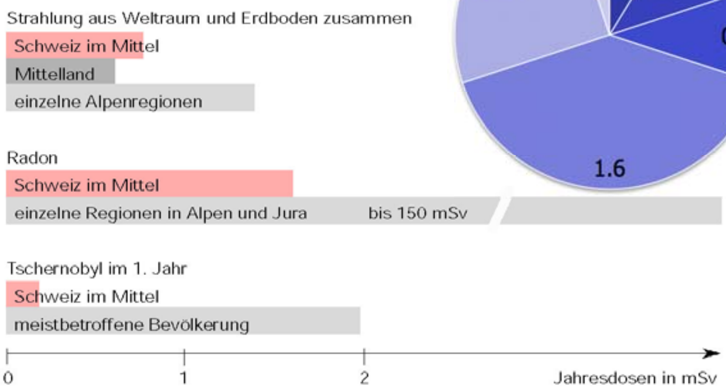
$$1\ \mathrm{Sv} = Q \cdot D[Gy]$$

D ist die absorbierte Energiedosis, gemessen in Gray.
Q ist ein dimensionsloser Qualitätsfaktor, der die biologische Wirkung unterschiedlicher Strahlung berücksichtigt.

Art der Strahlung	Energiebereich	Q
Photonen	alle Energien	1
Elektronen und Myonen	alle Energien	1
Neutronen	< 10 keV	5
	10 keV – 100 keV	10
	> 100 keV – 2 MeV	20
	> 2 MeV – 20 MeV	10
	> 20 MeV	5
Protonen	> 2 MeV	5
Alphateilchen, Spaltfragmente, schwere Kerne	alle Energien	20

Jahresdosis in der Schweiz





http://www.bag.admin.ch/themen/strahlung

Totale Jahresdosis für einen Durchschnittsschweizer:

4 mSv / Jahr

Grosse Streuung!

Röntgenuntersuchung

Strahlenbelastung	Röntgenuntersuchung	Effektive Dosis
sehr gering	Einzelne Zähne, Hand, Ellbogen, Fuss, Knie	ca. 0.01 mSv (0.003 – 0.03)
gering	Schädel, Lunge, Hüfte	ca. 0.1 mSv (0.03 – 0.3)
Mittel	Becken, Bauch, Wirbelsäule, Mamma Computertomographie des Kopfes und des Halses	ca. 1 mSv (0.3 – 3.0)
hoch	Computertomographie von Wirbelsäule, Bauch oder Becken Gefässdarstellungen Kontrastmitteluntersuchungen von Nieren, ableitenden Harnwegen und Magen-Darmbereich	ca. 10 mSv (3- 30)

Schweizerische Strahlenschutzverordnung

Art. 35 Dosisgrenzwert für beruflich strahlenexponierte Personen

1. Für beruflich strahlenexponierte Personen darf die effektive Dosis den Grenzwert von **20 mSv pro Jahr** nicht überschreiten. Artikel 36 bleibt vorbehalten.
2. Für beruflich strahlenexponierte Personen, die **wichtige Arbeiten ausführen**, beträgt der Dosisgrenzwert ausnahmsweise und mit Einwilligung der Aufsichtsbehörde **bis 50 mSv pro Jahr**, sofern die Summendosis der letzten fünf Jahre einschliesslich des laufenden Jahres **unter 100 mSv** liegt.
3. Für beruflich strahlenexponierte Personen darf die Äquivalentdosis die folgenden Grenzwerte nicht übersteigen:
   a) für die **Augenlinse 150 mSv pro Jahr**;
   b) für die **Haut, die Hände und die Füsse 500 mSv pro Jahr**.

Art. 36 Schutz von jungen Personen und Frauen

1. Für beruflich strahlenexponierte Personen im Alter von 16–18 Jahren darf die effektive Dosis den Grenzwert von **5 mSv pro Jahr** nicht überschreiten.
2. Ab Kenntnis einer Schwangerschaft bis zu ihrem Ende darf für beruflich strahlenexponierte Frauen die Äquivalentdosis an der Oberfläche des Abdomens **2 mSv** und die effektive Dosis als Folge einer Inkorporation **1 mSv** nicht überschreiten.
3. Stillende Frauen dürfen keine Arbeiten mit radioaktiven Stoffen ausführen, bei denen die Gefahr einer Inkorporation oder radioaktiven Kontamination besteht.

Art. 37 Dosisgrenzwert für nichtberuflich strahlenexponierte Personen

Für **nichtberuflich strahlenexponierte Personen** darf die effektive Dosis den Grenzwert von **1 mSv pro Jahr** nicht überschreiten.

Strahlenbelastung beim Fliegen

Erhöhte Strahlenbelastung durch kosmische Strahlung in 10 km Höhe

Die zusätzliche Strahlenbelastung für Besatzung und Passagiere beträgt im Mittel ca. **6 µSv pro Flugstunde**, wobei dieser Wert stark von der Flugroute abhängt. Die Belastung ist geringer in Äquatorialen Breiten und höher in Polnähe.

Die natürliche Strahlenbelastung **am Boden** beträgt **ca. 0.5 µSv/h**, also etwa ein Zehntel der Belastung in 10 km Höhe.

Ein zweistündiger Flug entspricht in etwa einer Strahlenbelastung einer Röntgenuntersuchung.

Strecke	Dauer	Dosis mSv
Basel - Palma de Mallorca	2:05	0.012
Zürich - Las Palmas	4:40	0.028
Genf - New York	8:55	0.054
Zürich - Vancouver	9:50	0.065
Zürich - Johannesburg	10:10	0.066
Zürich - San Francisco	11:10	0.075
Genf - Sao Paulo	11:50	0.081

Die effektive Dosis **der Besatzung von Linienflugzeugen** durch **kosmische Strahlung** bei Flugzeiten von **600 h pro Jahr** und durchschnittlichen Flughöhen von 10 km beträgt **etwa 3 mSv pro Jahr**.

Wirkung bei kurzeitiger Ganzkörper-Bestrahlung

Dosis	Wahrscheinliche Wirkungen
bis 0,5 Gy	**Keine Beschwerden. ab 0.25 Gy Reduzierung der roten Blutkörperchen**
bis 1 Gy	**Bei etwa 5 - 10 % der Betroffenen** folgende Krankheitserscheinungen: ▪ Übelkeit oder leichtes Erbrechen, ▪ **in der Regel keine klinischen Krankheitsbefunde**, ▪ keine akuten Todesfälle.
um 2 Gy	**Etwa die Hälfte der Betroffenen** erkranken mit folgenden Krankheitserscheinungen: ▪ Etwa vier Stunden nach Strahlenexposition Übelkeit oder Erbrechen, danach trügerisches Wohlbefinden für etwa zwei Wochen, ▪ anschließend Fieber, Haut- und Schleimhautblutungen, Entzündungen im Mund-Rachen-Bereich, ▪ **Erholungszeit von einigen Wochen**, ▪ **5 - 10 % Todesfälle.**
um 4 Gy	**Fast alle Betroffenen** erkranken mit folgenden Krankheitserscheinungen: ▪ Nach weniger als vier Stunden schweres Erbrechen, Mattigkeit, danach trügerisches Wohlbefinden für etwa ein bis zwei Wochen, ▪ anschließend Fieber, Haut- und Schleimhautblutungen, Entzündungen im Mund-Rachen-Bereich, Haarausfall, Blutarmut, ▪ Erholungszeit von mindestens sechs Monaten, ▪ **etwa 50 % Todesfälle innerhalb eines Monats**.
ab 6 Gy	**Alle Betroffenen** erkranken mit folgenden Krankheitserscheinungen: ▪ Nach weniger als zwei Stunden schwerstes Erbrechen, starke Mattigkeit, danach kurze Besserung des Befindens, ▪ anschließend schwere Krankheitserscheinungen wie oben, dazu: Durchfälle, Gewichtsverluste, ▪ **bis 100 % Todesfälle**

Schutzmassnamen

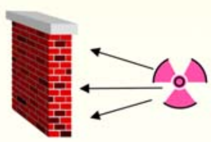
Sich möglichst kurze Zeit der Strahlung aussetzen:

$$D = \left\langle \frac{dD}{dt} \right\rangle_{avg} \cdot T$$

Möglichst grosser Abstand von einer Strahlungsquelle:

$$D = \frac{D_0}{r^2}$$

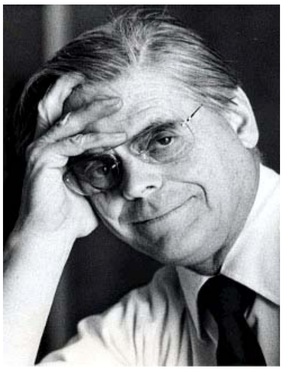
Abschirmen:



Kontamination vermeiden:
Keine radioaktiven Kerne auf Kleidung, Haut, im Essen, Einatmen.

Waschen hilft!

Strahlen in der Medizin



Robert Rathbun Wilson

* 4. März 1914
† 16. Januar 2000

1967-1978 Direktor des Fermilab´s

***1946**, Bob Wilson veröffentlicht*

"Radiobiological use of fast protons"

Mit ionisierender Strahlung Tumore beschiessen

Photonen- und Protonenstrahlen ionisieren Gewebe, wobei hauptsächlich OH^- entsteht. Dies bringt lebende Zellen in ein chemisches Ungleichgewicht.

Lebende, gesunde Zellen haben im Laufe der Evolution „gelernt", wie man diese OH^- Ionen neutralisiert. (Hauptsächlich durch Zufügen von Sauerstoff O_2).

Krebszellen sind Zellen, welche „nicht richtig funktionieren", sich zBsp ungebremst vermehren, etc. Daher haben diese schlechte Karten, wenn es darum geht OH^- Ionen zu neutralisieren. Bei Beschuss mit ionisierender Strahlung sterben sie ab...

Krebszellen sind sehr viel empfindlicher gegenüber Strahlenbelastung als gesundes Gewebe.

Die Strategie ist daher, Tumore mittels einer hohen Dosis von Photonen oder Protonen zu zerstören.

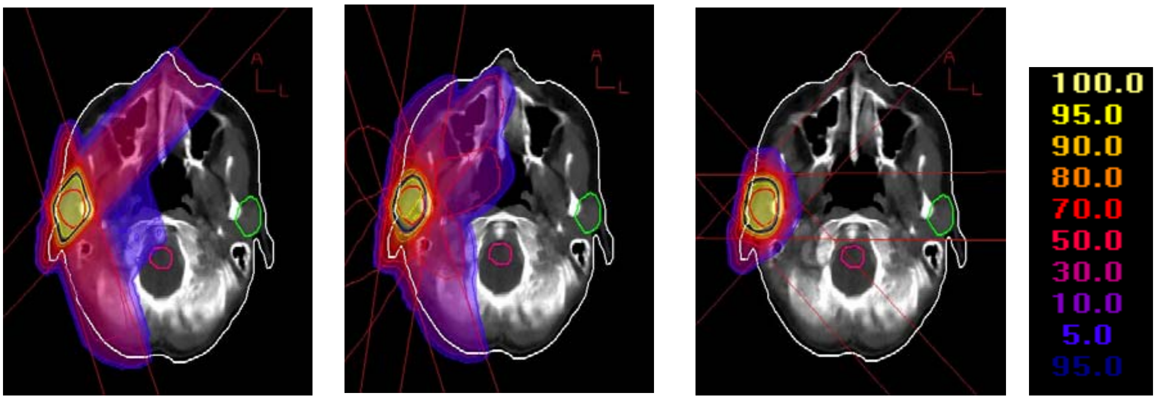
- **⇒ Beschädigtes gesundes Gewebe erholt sich in relativ kurzer Zeit.**
- **⇒ Durch geeignetes Zielen und Modulieren des Teilchenstrahls kann gesundes Gewebe geschont werden.**

Tumorbestrahlung

Glandula parotid cancer

(Ohrspeicheldrüsenkarzinom)

Photonen 2 Strahlrichtungen	**Photonen** 3 Strahlrichtungen	**Protonen** 3 Strahlrichtungen



In mehreren Sitzungen, und unter Beschuss mit **Photonen** aus verschiedenen Winkeln, kann der Ort der maximalen Dosis optimiert werden. Mit **Protonen** kann sehr viel besser und genauer der Ort der maximalen Dosis definiert werden. Photontherapie ist weit verbreitet, während die Protontherapie nur an wenigen spezialisierten Orten möglich ist. Der Grund dafür ist, dass nur wenige Protonen-beschleuniger existieren.

Universitätsklinik für Strahlentherapie und Strahlenbiologie, AKH, Wien

Radioiod-Therapie

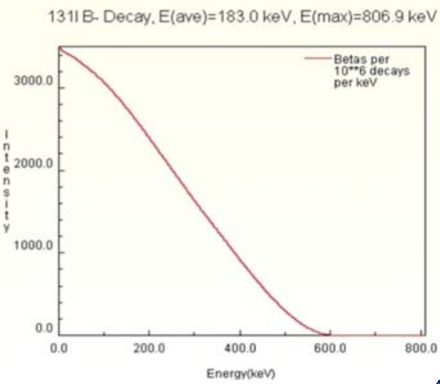
Zur Behandlung von **Schilddrüsen-Überfunktionen** und von **Schilddrüsenkrebs, wird eine Dosis von 0.9-9 GBq ^{131}Iod in Form einer kleinen Pille geschluckt.**.

Radioaktives ^{131}Iod wird vom Schilddrüsengewebe und von Iod speichernden Metastasen angereichert.

Das radioaktive Iod sendet Betastrahlung aus, die die umliegenden Zellen zerstört. Dabei beträgt **die Reichweite der Betastrahlung im Gewebe nur wenige Millimeter**, dies **bewirkt lokal eine Dosis von 300 Gy, die die Schilddrüse komplett zerstört.**

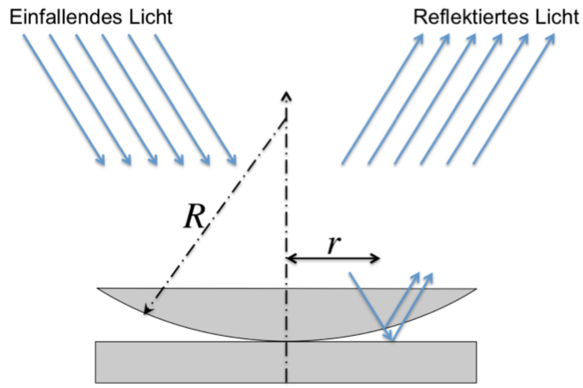
Deswegen kann die Radioiodbehandlung sehr gezielt unter weitgehender Schonung des gesunden Gewebes wirksam werden. **Erfolgsrate ca. 90-95 %**

$$^{131}_{53}I_{78} \xrightarrow{T_{1/2}=8d} {}^{131}_{54}Xe\,(stabil) + e^{-} + \bar{\nu}$$



Prüfungsaufgaben 2012

Interferenz
Einfallendes Licht der Wellenlänge λ trifft auf eine Linse mit Krümmungsradius R welche auf einer Glasplatte aufliegt. Am Luftkeil zwischen der Glasplatte und der Linse reflektiert das Licht sowohl an der Unterseite wie auch an der Oberseite, was zu einem Gangunterschied und somit zu Interferenzerscheinung, den Newton'schen Ringen, führt. Bei senkrechtem Lichteinfall habe der 10te dunkle Ring den Radius r.



a) Welche Wellenlänge hat das verwendete Licht?
b) Welchen Radius hätte dieser Ring, wenn man die Glasplatte samt Linse in Wasser stellt?
c) Anstelle von Wasser wird nun Benzol verwendet. Welchen Radius hat nun der 10te dunkle Ring?

Daten: R = 15 m, r = 10 mm, $n_{Linse} = n_{Glas} = 1.4$, $n_{Luft} = 1$, $n_{Wasser} = 1.3$, $n_{Benzol} = 1.5$

Auflösungsvermögen
Neil Armstrong (1930-2012) war der erste Mensch der seinen Fuss auf den Mond setzte. Ein Teil seines Mondlandemoduls ist noch immer auf dem Mond. Kritiker behaupten, dass die Mondlandung nur inszeniert worden sei, müsste man doch mit dem Hubble Space Teleskop das Mondlandemodul sehen können, aber nie wurden entsprechende Fotographien der NASA veröffentlicht.

a) Welches ist die kleinstmögliche Struktur, die man mit dem Hubble Space Teleskop gerade noch auf dem Mond mit sichtbarem Licht erkennen kann?
   Kann man so das Mondlandemodul erkennen?
b) Mit einem speziellen Instrument kann das Hubble Space Teleskop nicht nur sichtbares Licht, sondern auch ultraviolettes Licht bis zu einer minimalen Wellenlänge von 115 nm messen. Kann man damit das Mondlandemodul erkennen?
c) Was erwarten Sie für den Wellenlängenbereich der vom Mondlandemodul kommenden elektromagnetischen Strahlung? Was bewirkt dies auf Ihre Antwort zu 5b? (Es wird keine Rechnung verlangt, aber eine Begründung.)

Daten: Dimensionen des Mondlandemoduls: 2.6 m Höhe und 3.9 m Breite (ohne Landebeine)
Mittlere Distanz Erde-Mond: R=384400 km
Durchmesser des Hauptspiegels des Hubble Space Teleskops: D=2.4 m
Wellenlängenbereich für sichtbares Licht: $\lambda \in [360, 780]$ nm

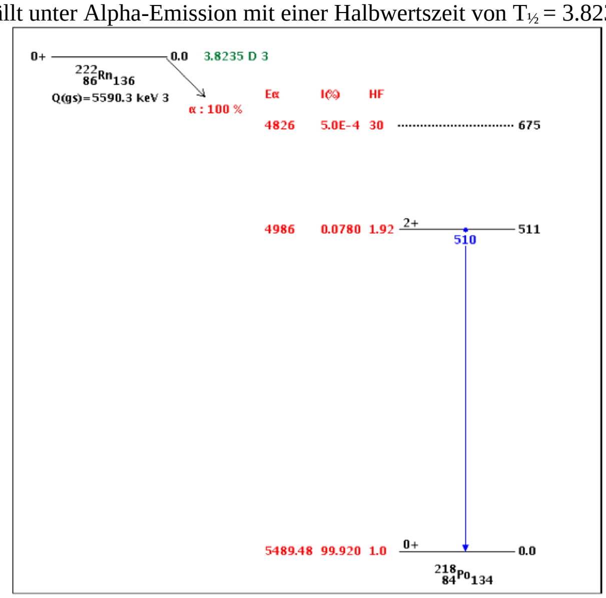
Massenverlust der Sonne
Die Sonne strahlt kontinuierlich Energie in Form von Strahlung ab. Dieser Energieverlust bewirkt eine kontinuierliche Abnahme der Masse der Sonne.

a) Wie gross ist der Massenverlust der Sonne pro Sekunde?
b) Wie lange dauert es, bis die Sonne eine Erdmasse durch Strahlung verloren hat?
c) Wie lange kann die Sonne mit dieser konstanter Strahlungsleistung noch leuchten?
d) Die Strahlungsleistung der Sonne ist natürlich nicht konstant, sondern proportional zur zeitabhängigen Masse der Sonne. Wie lange dauert es, bis die Strahlungsleistung und somit die Masse der Sonne gerade halb so gross sein wird wie Heute?

Daten: Strahlungsleistung der Sonne $P_{Sonne} = 4\times10^{26}$ W
Erdmasse $M_{Erde} = 6\times10^{24}$ kg
Sonnenmasse $M_{Sonne} = 2\times10^{30}$ kg,
Lichtgeschwindigkeit c = 299 792 458 ms^{-1}.

Radon-Zerfall

Das Radon Isotop ^{222}Rn zerfällt unter Alpha-Emission mit einer Halbwertszeit von $T_{½}$ = 3.8235 Tagen in ^{218}Po.



a) Die typische Aktivität in der Schweiz von Radon in Luft liegt bei 100-200 Bq/m^3.
Wie viele Radonatome befinden sich in einem m^3 Luft, wobei die Aktivität gerade 100 Bq/m^3 sei?

b) Die kinetische Energie des Alphateilchens beträgt in 99.92% der Zerfälle 5489.5 keV. Bestimme seinen Impuls in Einheiten MeV/c.

c) Bestimme seine Geschwindigkeit in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit c. Verwende die Definition des relativistischen Impulses.

d) Bestimme die de Broglie Wellenlänge dieser Alphateilchen. Was sind die kleinsten Objekte, die bei dieser Wellenlänge gerade noch aufgelöst werden können?

e) 0.078% der beim ^{222}Rn Zerfall entstandenen ^{218}Po Kerne befinden sich in einem angeregten Zustand, und erreichen den Grundzustand durch aussenden eines 510 keV Photons. Bestimme die Wellenlänge dieser Photonen.

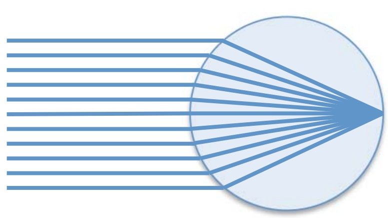
f) Treffen diese Photonen auf Materie, können sie durch Photoeffekt, sowie durch Comptoneffekt, Elektronen aus Atomhüllen herausschleudern.
Bestimme die maximale kinetische Energie dieser Elektronen beim Photoeffekt sowie beim Comptoneffekt.

Daten: Masse m_{Alpha} = 3727 MeVc^{-2}, Planck'sche Konstante h = 4.135×10^{-15} eVs,
Lichtgeschwindigkeit c = 299 792 458 ms^{-1}

Prüfungsaufgaben 2013

Geometrische Optik

Ein Bündel paralleler Lichtstrahlen aus einem Laser fällt auf eine massive Kugel aus einem transparenten Material mit dem Brechungsindex *n* (siehe Abbildung).



a) Wie gross ist *n*, wenn auf der Rückseite der Kugel eine punktförmige Abbildung entsteht?

b) Wie gross müsste *n* sein, damit in der Mitte der Kugel eine punktförmige Abbildung entsteht (falls dies überhaupt möglich ist)?

[Hinweis: Ausschliesslich paraxiale Strahlen betrachten.]

Relativitätstheorie

Ein Astronaut fliegt mit einer Geschwindigkeit von $0.8c$ von der Erde zum 25 Lichtjahre entfernten Stern Wega.

Wie viel Zeit ist auf den Uhren der Erde seit dem Abflug vergangen,

a) wenn der Reisende die Wega erreicht?
b) wenn ein Beobachter auf der Erde ein elektromagnetisches Signal über die Ankunft des Reisenden erhält?
c) um wie viel (gemessen im Bezugssystem Raumschiff) ist der Reisende für den Beobachter auf der Erde seit dem Abflug gealtert, wenn er die Wega erreicht?

Satellit

Ein Satellit auf einer Erdumlaufbahn kann durch den Photoeffekt elektrisch aufgeladen werden, wenn Sonnenlicht aus seiner Oberfläche Elektronen herauslöst. Daher müssen Satelliten so gebaut werden, dass dieser Effekt minimiert wird.

a) Angenommen, ein Satellit habe eine äußere Schicht aus Platin, einem Metall mit einer sehr hohen Austrittsarbeit (W = 5.32 eV). Bestimmen Sie die grösste Wellenlänge im einfallenden Sonnenlicht, die aus Platin noch Elektronen herauslösen kann.

Der Satellit habe einen mit Solarzellen bestückten Schirm (Fläche 2.60 m^2), der ständig, wenn sich der Satellit nicht gerade im Erdschatten befindet, senkrecht zum einfallenden Sonnenlicht gehalten wird. Die Intensität des Sonnenlichts sei 1.3 kW/m^2. Der Einfachheit halber sei nun Sonnenstrahlung monochromatisch mit einer Wellenlänge von 550 nm und sämtliche auf die Zellen auftreffende Sonnenstrahlung werde auch absorbiert.

b) Mit welcher Rate in [Hz] werden Photonen von den Zellen absorbiert?
c) Solarzellen aus Halbleitermaterial erzeugen mit jedem Photoelektron 1 eV an elektrischer Energie. Welche Leistung in [W] steht dem Satellit im Idealfall zur Verfügung?

Wasserstoffspektrum

Die Atome einer sehr kalten Wasserstoffprobe seien alle in ihrem Grundzustand. Ein Elektronenstrahl, der durch eine Potentialdifferenz von 12.3 V beschleunigt wurde, wird auf die Wasserstoffprobe geleitet, dabei werden Wasserstoffatome in angeregte Zustände versetzt. Die Intensität des Elektronenstrahls sei so klein, dass ein Elektron immer nur an einem Wasserstoffatom in seinem Grundzustand stösst.

a) Bei welchen Wellenlängen in [nm] werden angeregte Wasserstoffatome Strahlung aussenden? Nenne alle die hier vorkommen können.

Beim Aussenden von Strahlung erfahren die Wasserstoffatome aufgrund der Impulserhaltung einen Rückstoss, der häufig vernachlässigt wird, hier aber berücksichtigt werden soll.

b) Stelle die Reaktionsgleichung auf, die einen Stoss eines Elektrons mit einem Wasserstoffatom beschreibt.
c) Wie gross ist die Geschwindigkeit in [m/s], die ein Wasserstoffatom beim Aussenden eines Photons erfährt. Verwende die kleinste Wellenlänge aus obiger Teilaufgabe a)
d) Um welchen Bruchteil verschiebt sich dadurch die Wellenlänge des Photons?

[Hinweis: Energie und Impulserhaltung verwenden.
Für die kinetische Energie des Wasserstoffatoms kann klassisch gerechnet werden: $E_H^{kin} = p_H^2/2m_H$ *mit* p_H *dem Impuls des Wasserstoffatoms.]*

Masse von Wasserstoff	m_H=938.78 MeVc^{-2}
Rydbergenergie	Ry=13.6 eV